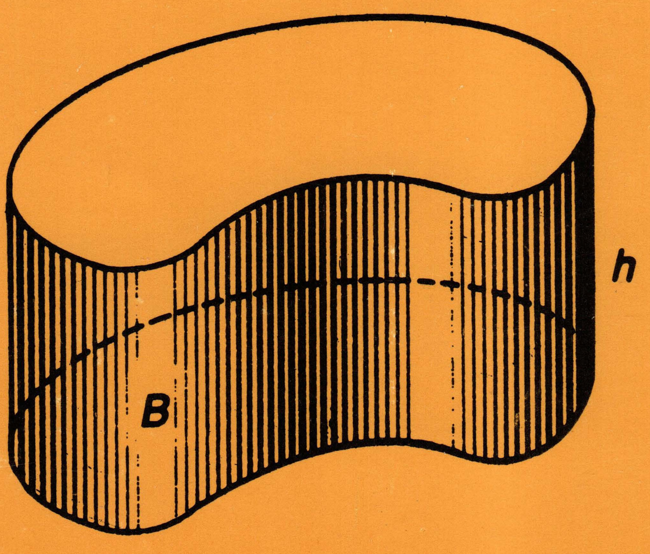
بحث ریاضی با دانش آموز

مؤلف : سرژ لانگ

مترجم : نعمت عبادیان



بسم الله الرحمن الرحیم

بحث ریاضی با دانش آموز

مؤلف : سرژ لانگ

مترجم : نعمت عبادیان

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه
بحث ریاضی
این کتاب ترجمه‌ای است از:
serge lang
MATH!
Encounters with High school students
تألیف: سرژلانگ
ترجمه: نعمت عبادیان
صفحه‌آرا: هوشنگ آشتیانی
چاپ‌اول: ۷۱ / چاپ سوم: پاییز ۱۳۷۶
تیراژ چاپ اول و دوم: ۱۵۰۰۰ / تیراژ چاپ سوم: ۷۰۰۰ نسخه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۸۹۳۸۰۹ ۹ـ۸۸۱۰۳۲۵
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹
چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه
شابک ۸ ـ ۳۰۷ ـ ۴۳۶ ـ ۹۶۴
ISBN 964-436-307-8

فهرست مطالب

عزیزانم کریستوفر و راچل و سیلون و یائل و سایرین

این کتاب را برای شما می‌نویسم چون به مدارسی در فرانسه و کانادا مانند مدرسهٔ شما آمدم و با دانش آموزانی که می‌توانند دوستان شما باشند و در طرح مشترکی شرکت داشتند راجع به ریاضیات صحبت کردم.

با آنکه راه و روش ریاضی‌دانان را در سر داشتم ولی می‌خواستم در سطح کلاس معلومات خودشان، ریاضیات زیبا را به آنها نشان دهم. بسیاری از کتابهای درسی مطالب را چنان ارائه می‌دهند که به نظرم آشفته می‌نماید. مضامین این کتابها بی‌دلیل و به دور از هماهنگی بر هم متراکم می‌شوند. جزئیات فنی را بی‌وقفه به دنبال هم می‌آورند بی‌آنکه زمینهٔ کلی اندیشه‌ای را عرضه کنند که می‌تواند این جزئیات را در خود جای دهد و به آنها معنی و لطافت ببخشد. این کتابها کلیات ریاضی را همچون آهنگ یک قطعهٔ بزرگ موسیقی نشان نمی‌دهند و این مایهٔ بسی تأسف است چون کار ریاضی فعالیتی شورانگیز و به غایت زیبا است.

این کتاب شامل چند درس و یا بهتر بگویم چند گفتگو است، که به خاطر حفظ سبک زندهٔ آنها، تا آنجا که میّسر بود، در پیاده کردنشان از نوار تغییری در آنها نداده‌ام. از تبادل نظری که با همهٔ این شاگردان در کلاسهای مختلف داشتم، لذت فراوان بردم. موضوعات مورد بحث، مطالبی از هندسه و جبر می‌باشد، که برای کلاسهای نهم و دهم [1] قابل درک است. من پارا از این هم فراتر گذاشتم و با شاگردان کلاس هشتم [2] نیز راجع به این مطالب گفتگو کردم! اگر دانش‌آموزان آن کلاسها این گفتگوها را درک کرده باشند و از مضمون ریاضی آنها لذت برده باشند، برای شما نیز بی‌شک لذت بخش خواهد بود.

---

۱ - تقریباً همان کلاسهای اول و دوم دبیرستان ما است.

۲ - معادل کلاس سوم راهنمایی در ایران.

گفتگوهامستقل از یکدیگرند و بنابراین لازم نیست مطالب کتاب را از آغاز تا پایان دنبال هم بخوانید. هر مبحث مطلب جداگانه‌ای دارد و خواندن هر یک از آنها بدون ارتباط با مباحث دیگر نیز می‌تواند لذت بخش باشد. چنانچه در خواندن هر یک از مباحث کتاب، دنبال کردن مطلب را مشکل یافتید، دلسرد نشوید و از آن زود بگذرید، چه بسا، بخشهای دیگر آن درس ساده‌تر باشد. اگرمایل بودید دوباره به آن عبارات مشکل نگاهی بیاندازید. اغلب، مطلبی که ظاهراً مشکل می‌نماید، پس از آنکه آن را به زمان دیگری موکول می‌کنید، چندان ساده می‌شود که دهانتان از تعجب باز می‌ماند. کافی است کتاب را سریع بخوانید، گلچین کنید و به ذهن خود، مجال کار کردن دهید.

بخش زیادی از برنامه تحصیلی مقدماتی و دبیرستانی خشک و بی‌روح است. شاید هرگز این فرصت را به‌دست نیاورده باشید که ببینید ریاضیات تا چه حد زیبا است. امیدوارم، چنانچه شما شاگرد دبیرستانی باشید، بتوانید دروس جبر و هندسه‌ای که در این کتاب می‌خوانید، تا آخر دنبال کنید.[۳]

به برنامهٔ تحصیلی دبیرستان اعتراضات بسیار دارم. شاید مهمترین اشکالی که می‌توان گرفت ناهماهنگی و از هم گسیختگی موضوعات و بی‌تحرکی و وجود تمرینات سطحی باشد.[۴] مطالب این کتاب با آنچه که در کتب درسی وجود دارد، کاملاً فرق می‌کند. امیدوارم مطالعهٔ این کتاب اشتیاق شما را برانگیزد و عاقبت به همان اندازه که من ریاضیات را دوست دارم، شما آن را دوست بدارید.

سرژلانگ

۳- پنج گفتار اول، جنبهٔ هندسی و دو گفتار آخر به جبر ارتباط دارد و همچنین کتاب هندسه‌ای را که همراه باگنه مورو (Gene Murrow) نوشته‌ام، بخوانید.

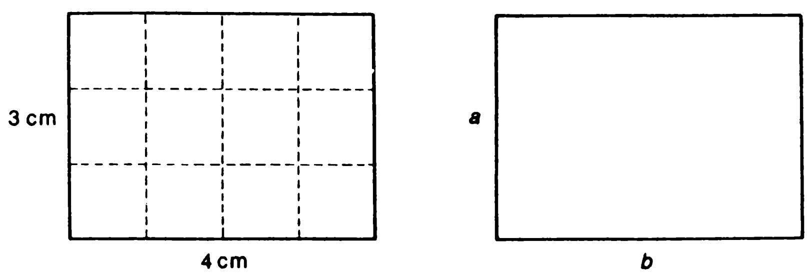
۴- حاجت به تذکار نیست که منظور مؤلف، کتب درسی امریکا است.

پی چیست؟

این گفتگو در دبیرستانی در حومهٔ تورنتو، در آوریل ۱۹۸۲، با دانش‌آموزان کلاسی‌که سن آنها تقریباً پانزده سال بود، انجام گرفت و حدوداً یک ساعت و ربع طول کشید.

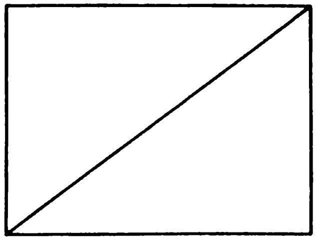
سرژلانگ. اسم من سرژلانگ است. کار اصلی من تدریس در دانشگاه ییل است. ولی امروز اینجا آمده‌ام تا با شما ریاضیات کار کنم.

می‌خواهیم راجع به مساحت چند شکل سادهٔ هندسی از قبیل مستطیل، مثلث و دایره که حتماً با آنها آشنا هستید، صحبت کنیم. از مستطیل شروع می‌کنیم. می‌دانیم کـه مسـاحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است. پس اگر طول اضلاع مستطیلی a و b باشد، مساحت آن ab خواهد بود. مثلاً مستطیلی که طول اضلاع آن ۳cm و ۴cm باشد، مساحت آن ۱۲cm^2 است. شکل زیر این معنا را به خوبی نشان می‌دهد.



مساحت = 12 cm^2 مساحت = ba

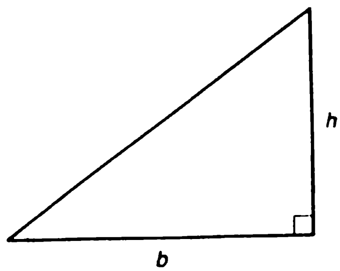
اگر مستطیلی را به این صورت دونیم کنید:



[دو] مثلث قائم الزاویه به دست می‌آورید. بنابراین مساحت مثلث قائم‌الزاویه، نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع است. از این رو می‌توان نوشت:

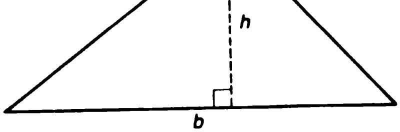
$$\boxed{\text{مساحت مثلث قائم الزاویه} = \frac{۱}{۲}bh}$$

در این دستور، b قاعده و h ارتفاع مثلث است.

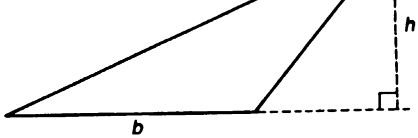


$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}bh$$

همچنین باید بدانید که اگر h را ارتفاع هر مثلثی فرض کنیم، این دستور برای هر نوع مثلثی صادق است. درستی این فرمول را در دو شکل ممکن زیر به شما نشان می‌دهم.

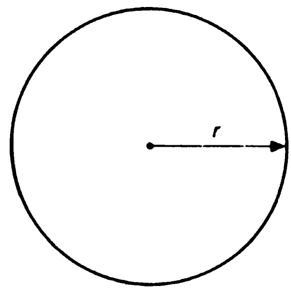


$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}bh$$



$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}bh$$

چون می‌خواهم به مطلب جالبتری یعنی دایره بپردازم، اثبات درستی این دستور را به شما واگذار می‌کنم[1]. پس فرض می‌کنیم که مساحت مثلث را می‌دانید. حالا دایره‌ای دارید به شعاع r.



آیا می‌دانید مساحت دایره را با چه دستوری محاسبه می‌کنند؟

یکی از شاگردان. پی در مجذور r.

سرژلانگ: درست است، πr^2. خوب، پی چیست؟

یکی از شاگردان: پی چیست؟

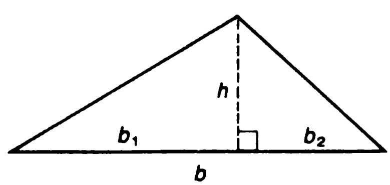
سرژلانگ: بله.

شاگرد. ۳/۱۴.

سرژلانگ. می‌گویید π، ۳/۱۴ است. آیا این عبارت دقیق است؟

شاگرد. نه، فکر نمی‌کنم.

۱ـ برهان مربوط به شکل اول را شرح می‌دهم: مانند شکل زیر از یک رأس مثلث عمودی برضلع مقابل وارد کنید.



با این کار، مثلث اصلی به دو مثلث قائم الزاویه با قاعده‌های b_1 و b_2 طوری تجزیه می‌شود که $b_1+b_2=b$. ارتفاع h در هر دو مثلث مشترک است. بنابراین با استفاده از دستور مساحت مثلث قائم الزاویه، داریم:

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{1}{2}b_1h+\frac{1}{2}b_2h=\frac{1}{2}(b_1+b_2)=\frac{1}{2}bh$$

صحت دستور برای شکل اول به اثبات رسید. برای شکل دوم نیز از همین شیوه استفاده کنید. در اینجا، به جای جمع به تفریق نیاز پیدا می‌کنید.

سرژلانگ. پس چرا ۳/۱۴ را گفتید؟

شاگرد. خوب، دنباله دارد.

سرژلانگ. بسیار خوب، به دنبال آن سه نقطه می‌گذاریم تا بر ادامهٔ آن دلالت کنیم. این طور،... ۳/۱۴. چگونه ادامه پیدا می‌کند؟ (دانش آموزان جوابهای مختلفی می‌دهند)

سرژلانگ. معلوم نیست! پس چگونگی تداوم آن خودش مسئله است. منظورم این است که چگونه می‌توان آن را محاسبه کرد؟

یکی از شاگردان. با اندازه گرفتن محیط دایره و تقسیم آن بر دو برابر شعاع.

سرژلانگ. آهان. اول گفتید که، πr^2 مساحت دایره است ولی حالا از محیط حرف می‌زنید. محیط را c می‌نامیم. شما دقیقاً چه گفتید؟ شما این حکم را بیان کردید که [$\pi = \frac{c}{2r}$ و یا]

$$c = 2\pi r$$

شما در واقع می‌گویید: $2r$، قطره دایره است،پس محیط دایره، پی ضرب در قطر است [$\pi \times$ قطر]. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$c = \pi d.$$

در این فرمول، d قطر دایره است، $d = 2r$. ولی حالا توجه کنید، دو فرمول دارید، یکی برای مساحت و دیگری برای محیط:

$$\pi r^2 \text{ و } 2\pi r$$

راستی، اسم شما چیست؟

شاگرد. سرژ.

سرژلانگ. آه. سرژ. هم‌نام هستیم [خنده.] سرژ گفت، برای محاسبهٔ π، باید محیط را بر قطر تقسیم کنیم. محیط را می‌توان اندازه گرفت. در خانه می‌توانید با نوار دور قابلمه‌ای را اندازه بگیرید و قطر آن رابا خط کش تعیین کنید و بعد محیط را بر قطر تقسیم کنید. اگر با دقت عمل کنید احتمالاً می‌توانید تا یک یا دو رقم اعشار را درست محاسبه کنید. مقدار به دست آمده، ارزش تقریبی π است.

دست یابی به ارزش تقریبی π از راه اندازه گیری مساحت کار شاقی است.

حالا این سؤال مطرح می‌شود: فرمولهای محیط و مساحت را دارید، چگونه می‌توان درستی آنها را ثابت کرد؟

شاگردان. [سکوت،نگاهها کنجکاو می‌شوند]

سرژلانگ. از چه راهی می‌توان آنها را ثابت کرد؟ آیا اتفاق افتاده است که کسی مسئله اثبات این فرمولها را مطرح کند؟ به شما فقط فرمولها را داده‌اند، همین و بس.

شاگردان. [نگاه حاکی از پاسخ منفی براغلب چهره‌ها نمایان می‌شود. یکی دونفر دست خود را بالا می‌برند.]

سرژ.فقط این را می‌توان گفت که π از تقسیم محیط برقطر حاصل می‌شود، باید آن را به دست آورد.

سرژلانگ. چه چیزی را باید به دست آورد؟ شما فقط یکی از دو فرمول را تکرار کردید. دوفرمول در اختیار داریم. چنانچه بخواهیم آنها را ثابت کنیم باید از جایی شروع کنیم و با استناد به منطق آنها را نتیجه بگیریم. خوب، از چه چیزی شروع کنم؟

سرژ. از تقسیم محیط بر قطر که مساوی است با π شروع کنید.

سرژلانگ. وبعد؟ قرار است که به مساحت برسیم. π چه تعریفی دارد؟ پیش از اثبات هر حکمی، باید تعریفی در اختیار داشته باشیم.

سرژ. تعریف همان است که گفتم، محیط بخش برقطر.

سرژلانگ. ولی بعد ناچارید ثابت کنید که این π، با آن π که در دستور مساحت آمده یکی است. اگر بگویید که π، محیط تقسیم بر قطر است، قطر دوبرابر شعاع است، می‌توانید از این عبارت به عنوان تعریف استفاده کنید ولی بعد ملزم می‌شوید که آن فرمول دیگر را ثابت کنید.[1]

پس، به تعریفی نیاز داریم تا با آن کار اثبات را آغاز کنیم. در غیر این صورت هیچ چیز را نمی‌توان ثابت کرد. و بعد به شیوه‌ای منطقی، فرمولها را نتیجه می‌گیریم. پس سؤال اصلی این است که از کجا باید شروع کرد؟ این چیزی است که به دنبال آنم. می‌خواهم از جایی حرکت کنم و به این دو فرمول برسم.

راجع به این دو فرمول، دوچیز را باید مشخص کرد. اول آنکه r^2 از کجا آمده و دوم، π از چه راهی وارد این دستورها شده است. هر یک از این دو، از جهتی، غیر از جهت دیگری به مسئله راه یافته است. یکی از این جهات به r^2 ارتباط دارد. چرا در فرمول مساحت r^2 دیده می‌شود؟ و چرا در فرمول محیط r یافت می‌شود (و نه r^2) باید دربارهٔ وجود r و r^2 بحث

۱ـ به علاوه باید ثابت کنید که هر دایره‌ای را اختیار کنید نسبت محیط به قطر آن، همان عدد را نتیجه می‌دهد. این دقیقاً یکی از چیزهایی است که قصد اثبات آن را داریم. در آن هنگام به صرافت نیفتادم که این اشکال را به این روشنی بیان کنم.

کرد. مطلب دیگری که باید به آن پرداخت π است.

از اول شروع می‌کنیم. نخست r^2 را توضیح می‌دهم و سپس دربارهٔ π سخن خواهم گفت. حالا به مورد سادهٔ مستطیل بازگردیم. فرض کنید مستطیلی داریم با اضلاع a و b. مساحت مستطیل چیزی جز حاصل ضرب دوضلع آن نیست یعنی ab. حالا مستطیلی را در نظر می‌گیریم که اضلاع آن ۲a و ۲b باشد. پس در واقع مستطیل را به نسبت ۲ بزرگ کرده‌ایم مساحت چه تغییری می‌کند؟

یکی از شاگردان. دوبرابر می‌شود.

سرژلانگ. اسم شما چیست؟

شاگرد. آدولف.

سرژلانگ. آیا مساحت دوبرابر می‌شود؟ مساحت مستطیل جدید چقدر می‌شود؟

[شاگرد دیگری صحبت می‌کند]

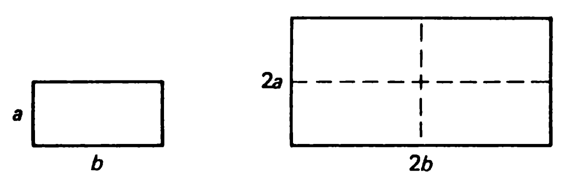
سرژلانگ. نه، از آدولف پرسیدم. مساحت مستطیل مساوی است با حاصل ضرب اضلاع. اینطور نیست؟

آدولف. بله همین‌طور است.

سرژلانگ. خوب، یک ضلع مستطیل جدید ۲a است، طول ضلع دیگر چقدر است؟

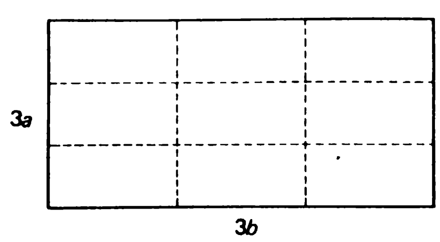
آدولف. ۲b.

سرژلانگ. درست است، پس مساحت مستطیل برابر است با ۲a در ۲b و یا ۴ab.



مساحت = ab   مساحت = ۲a × ۲b = ۴ab

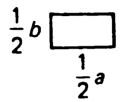
حالا مستطیلی را در نظر بگیرید که طول اضلاع آن سه برابر مستطیل اولی باشد، یعنی ۳a و ۳b.



آدولف، مساحت این مستطیل که طول اضلاع آن سه برابر طول اضلاع مستطیل قبلی است چقدراست؟

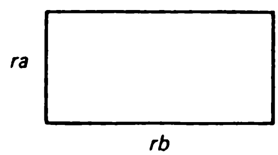
آدولف. ۹ab

سرژلانگ. درست است، ۹ab، ۳a در ۳b که مساوی است با ۹ab. حالا مستطیلی را اختیار می‌کنیم که طول اضلاع آن، نصف طول اضلاع مستطیل اولی باشد، یعنی $\frac{1}{2}$ a و $\frac{1}{2}$ b مساحت این مستطیل چقدر است؟



آدولف. ab روی ۴

سرژلانگ. درست است. یک چهارم ab . حال، به طور کلی فرض کنید که مستطیلی داریم با ابعاد ra و rb. به این شکل:



آدولف، مساحت این مستطیل چقدر است؟

آدولف. ra در rb .

سرژلانگ. ra در rb که برابر است با؟

آدولف. مجذور r در ab .

سرژلانگ. بله r^2ab . بنابراین اگر اضلاع مستطیلی را به نسبت r بزرگ کنیم، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟ آدولف.

آدولف. لطفاً تکرار کنید.

سرژلانگ. مستطیل اولی را از دو طرف به نسبت r بزرگ می‌کنم، متوجه شدی؟ طول اضلاع مستطیل جدید ra و rb است. مساحت چه تغییری می‌کند؟ مساحت مستطیل اولی ab بود. مساحت مستطیل جدید چقدر است؟

آدولف. مجذور r در ab.

سرژلانگ. بله، r^2ab و نه rab. مساحت به چه نسبتی تغییر می‌کند؟

آدولف. r^2

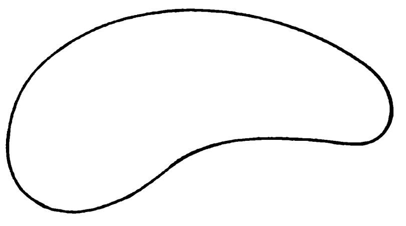
سرژلانگ. چندلحظه پیش گفتی r، خوب، پس r نیست. کاملاً متوجه شدی؟ همه فهمیدند؟

[شاگردان پاسخ مثبت می‌دهند.]

سرژلانگ. بنابراین اگر مستطیلی را در r بزرگ کنم، مساحت در r^2 تغییر می‌کند. واضح است که r می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از ۱ باشد، مثلاً $r=\frac{1}{2}$ یا $r=\frac{1}{3}$. تا اینجا فهمیدید که تغییرات مساحت بر چه منوالی است. سؤالی هست؟ کسی اشکالی ندارد؟

[کسی سؤالی نمی‌کند.]

بسیار خوب. حالا به جای مستطیل، شکل دیگری را در نظر می‌گیرم، فرض کنید خط منحنی بسته‌ای داریم مانند این شکل:

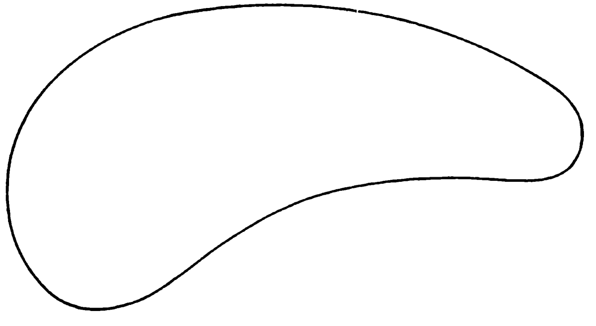


شبیه به یک کلیه. کلیه‌ای را در نظر بگیرید که مساحت آن مقدار معین A باشد. حال اگر آن را در r بزرگ کنم، مساحت کلیه بزرگ شده چقدر می‌شود؟

یکی از شاگردان. A^2 می‌شود؟

سرژلانگ. نه، برگردیم به عقب. مستطیلی داریم که مساحت آن A است. آن را به نسبت ۲ بزرگ می‌کنیم. مساحت مستطیل جدید چقدر می‌شود؟

یکی از شاگردان. $4A$.



سرژلانگ. بله، مساحت در مجذور ۲ تغییر می‌کند. اگر مستطیلی را در r بزرگ کنیم،

مساحت آن در ضریب r^2 تغییر می‌کند. حالا اگر شکل خمیده را به نسبت ۲ بزرگ کنیم، مساحت به چه نسبتی تغییر می‌کند؟

یکی ازشاگردان: ۴ .

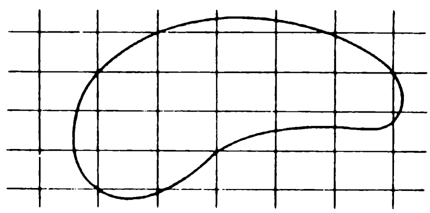
سرژلانگ. بسیار خوب، باز هم مساحت در ۴ تغییر می‌کند. چرا؟ به چه دلیل؟ در این جا که مستطیل نیست، کلیه است. چگونه می‌توان آن را ثابت کرد؟ کسی نظری دارد؟ بسیار خوب، آدولف، تو بگو.

آدولف. دور آن را اندازه می‌گیریم.

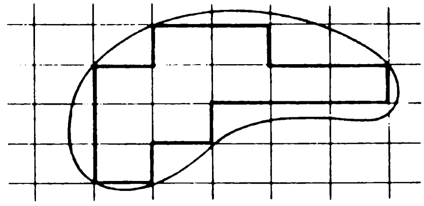
سرژلانگ. نه، با اندازه گیری دور شکل نمی‌توان مساحت آن را حساب کرد. با این کار، محیط به دست می‌آید. صحبت سر مساحت است. سطح درون شکل.

[شاگردی دست خود را بالا می‌برد، شاگردان حدس و گمانهایی ابراز می‌کنند، اندکی بعد، سرژلانگ دوباره زمام امور را به دست می‌گیرد]

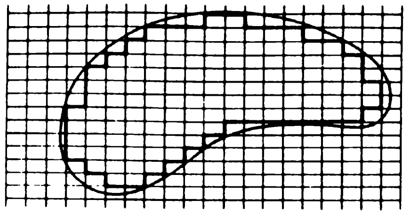
سرژلانگ. سعی می‌کنم مطلب را به مستطیل بکشانم. شبکه‌ای به این صورت رسم می‌کنم



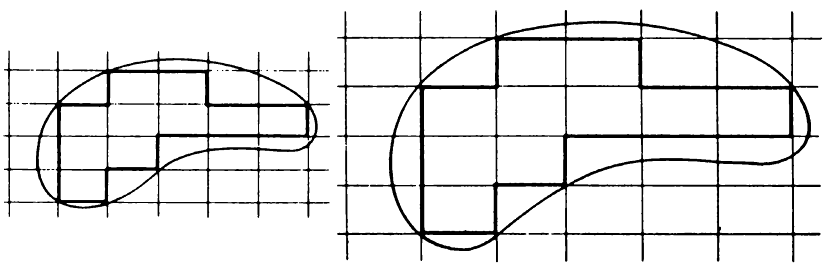
شبکه‌رامی‌بینید؟ به این ترتیب مساحت کلیه، تقریباً برابر با مساحت مستطیلهای درون آن می‌شود. به مستطیلهایی که کاملاً درون کلیه قرار گرفته‌اند، توجه می‌کنیم. [سرژلانگ، خط معلوم در شکل بعد راپررنگ می‌کند.] این طور، از اینجا کاملاً پایین می‌آییم و آنجا بالا و و...



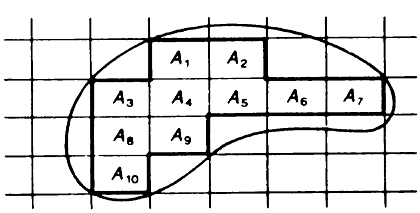
حال اگر این مستطیلها را، مستطیلهای درون خط پررنگ را در نظر بگیریم، مساحت تقریبی کلیه را به دست می‌آوریم و اگر رشته‌های شبکه را به هم نزدیکتر کنم، به تقریب بهتری دست خواهم یافت.



همهٔ این مستطیلهای کوچک را می‌بینید؟ اگر مجموع مساحتهای این مستطیلهای کوچک را به دست آوریم، می‌توانیم مساحت کلیه را با تقریب قابل قبول محاسبه کنیم.
حالا شکل رابه نسبت r بزرگ می‌کنیم. تجانسی برقرار می‌کنیم. به عبارت دیگر، برحسب این که نسبت تجانس یعنی r چه باشد، شکل ممکن است بزرگ و یاکوچک شود. از این رو مستطیلها هم به نسبت r متجانس می‌شوند و چنانچه r بزرگتر از ۱ باشد مستطیلها نیز بزرگتر می‌شوند.



یکی از شاگردان. بله، اگر مستطیلهای داخل کلیه را در ۲ بزرگ کنید در آن صورت مساحت مستطیلهای بزرگ شده چهار برابر مستطیلهای قبلی می‌شود.
سرژلانگ. درست است. و اگر به نسبت r بزرگ کنیم، مساحت مستطیلهای حاصل، r^2 برابرِ مساحت مستطیلهای اولی می‌شوند. همه فهمیدند. [سرژلانگ کنار تخته سیاه است و به مستطیلها اشاره می‌کند و می‌گوید] به این مستطیلها توجه کنید. مثل این. این اولین مستطیل و این دومی و این سومی و الی آخر. مساحت این مستطیلها را A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5 و A_6 و A_7 و A_8 و A_9 و A_{10}. و فرض می‌کنیم با این کار، مساحت مستطیلها را شماره گذاری کردیم.



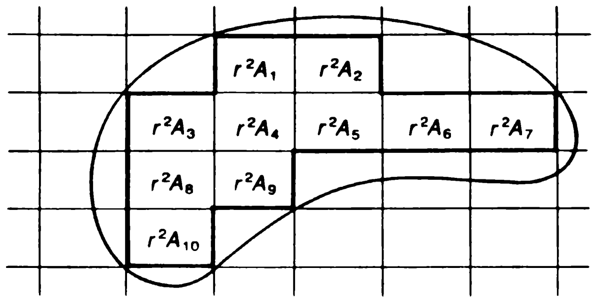
مستطیلهای درون شکل را می‌بینید؟ خوب، مجموع مساحت کل این مستطیلها را به دست می‌آوریم و حاصل جمع را این گونه نمایش می‌دهیم:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 + A_9 + A_{10}$$

ده مساحت داریم. این حاصل جمع تقریباً مساوی است با مساحت کلیه. اشکالی نیست؟ حال همان کاری را می‌کنم که در عکاسی می‌کنند، همهٔ شکل را به نسبت r بزرگ می‌کنم. به هر نسبتی که دلتان می‌خواهد، کدام یک را بیشتر می‌پسندید: ۲ یا r ؟ عدد مشخصی را می‌خواهید یا از r استفاده کنم؟

چند شاگرد. r، می‌توانید از r استفاده کنید.

سرژلانگ. می‌توانم از r استفاده کنم. بسیار خوب. پس شکل را در r بزرگ می‌کنم.



حال اگر مساحت یکی از این مستطیلها A، باشد، مساحت مستطیلهای مجانس همانطور که آن شاگرد گفت ـ اسم شما چیست؟

شاگرد. راچل

سرژلانگ. راچل. همانطورکه راچل گفت، مساحت مستطیل مجانس، r^2A خواهد شد. پس اگر در اینجا مساحت یک مستطیل A باشد، مساحت آن مستطیلها r^2A می‌شود. در این صورت، مجموع مساحتهای مستطیلهای بزرگ شده چقدر خواهد شد؟

$r^2A_1 + r^2A_2 + r^2A_3 +$ تا r^2A_{10}.

راچل. بله

سرژلانگ. اگر از r^2 فاکتور بگیریم، r^2 را در اول عبارت قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$r^2(A_1 + A_2 +$ تا $A_{10})$

ولی $A_1 + A_2 + \dots + A_{10}$ مساحت تقریبی کلیه است، و

$$r^2(A_1+A_2+...+A_{10})$$

مساحت تقریبی کلیه که در نسبت r تجنیس شده است و در نتیجه مساحت تقریبی شکل جدید r^2 برابرِ مساحت شکل قبلی است.

حال اگر شبکه را ظریفتر کنیم، مساحت مستطیلهای درون کلیه به مساحت واقعی کلیه نزدیکتر و نزدیکتر می‌شود و به همین دلیل است که مساحت کلیه هم در نسبت r^2 تغییر می‌کند. استدلال را متوجه شدید؟ نه کاملاً؟

یکی از شاگردان. تاحدودی

سرژلانگ. تا حدودی... استدلالِ راجع به مستطیل را فهمیدید؟ اگر هر مستطیل را در r تغییر دهیم، مساحت آن در r^2 تغییر می‌کند. قبول دارید که می‌توان مساحت شکل منحنی را تقریباً مساوی با مساحت چند مستطیل در نظر گرفت؟ چگونه می‌توانیم اندازهٔ تقریبی شکل منحنی را به واسطهٔ مساحت مستطیلها به دست آوریم؟

راچل. با جمع کردن مساحت مستطیلهای کوچک.

سرژلانگ. صحیح. اول شبکه‌ای را رسم می‌کنیم و بعد مساحتهای مستطیلهای کوچک را جمع می‌کنیم با این کار، اندازهٔ تقریبی مساحت کلیه رابه دست می‌آوریم. سپس، همه شکل را به نسبت r بزرگ می‌کنیم. هریک از این مستطیلها به همین نسبت بزرگ می‌شوند و مساحت هر مستطیل در r^2 تغییر می‌کند و به همین دلیل مساحت شکل منحنی به نسبت r^2 تغییر می‌یابد. قانع شدید؟ کسی حرفی دارد؟

[شاگردان دربارهٔ این مطلب باهم بحث می‌کنند]

یکی از شاگردان: بزرگتر می‌شود؟

سرژلانگ. بله، اگر r بزرگتر از ۱ باشد، شکل بزرگتر می‌شود و اگر r، [مثلاً] $\frac{1}{2}$ باشد، شکل به نسبت $\frac{1}{4}$ کوچکتر می‌گردد. بسیار خوب. قبول کردید؟ کسی هست که اشکال داشته باشد؟

یکی دیگراز شاگردان. باشد، قبول می‌کنم [خنده، لحن او خنده‌دار بود]

سرژلانگ. کسی اعتراضی به این استدلال دارد؟

یکی از شاگردان. سؤالی دارم. اگر r کوچکتر از ۱ می‌بود آیا شکل به نسبت r به قوهٔ منفی ۲ $[=r^{-2}]$ تغییر می‌کرد؟

سرژلانگ. نه. اگر r کوچکتر از ۱ باشد، نسبت تجانس r^2 می‌شود، چون r^2 هم در این جا کوچکتر از یک می‌گردد. r را می‌توانید به صورت عدد دیگری بنویسید که قوهٔ منفی یک داشته باشد. به عبارت دیگر، $r=s^{-1}$ و بنابراین r^2 برابراست با s به قوهٔ منفی ۲ و یا

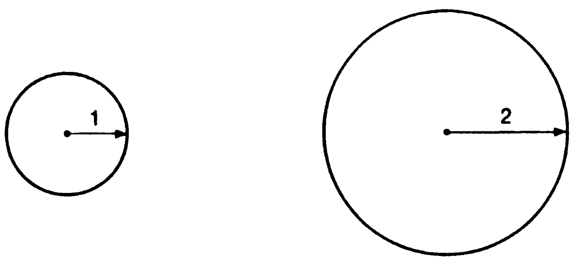
$r^{2} = s^{-2}$. در حقیقت، ضرب در r^{2} در اینجا با عامل کوچکتر از ۱، انقباض و در هم فشردگی به وجود می‌آید.

یکی از شاگردان. پس در واقع، نمی‌توان آن را بزرگ شدن خواند.

سرژلانگ. بسیار خوب، بهتر است از اسم خنثای تجانس استفاده کنیم. اگر r عددی مانند ۲ یا ۳ باشد، شکل در اثر تجانس، بزرگتر می‌شود و اگر r عددی مانند $\frac{1}{2}$ باشد، مساحت به نسبت $\frac{1}{4}$ تغییر می‌کند و کوچکتر می‌گردد و ، بنابراین از اصطلاح خنثای تجانس استفاده می‌کنیم.

بحث ما دربارهٔ به دست آوردن مساحت تقریبی شکل منحنی به واسطهٔ مستطیلها بود. می‌توانیم بگوییم که در اثر تجانس با نسبت r ، مساحت در r^{2} تغییر می‌کند. بحث را ادامه بدهم؟ تخته را پاک کنم؟ [شاگردان سر را به علامت موافقت پایین می‌برند.]

ادامه می‌دهیم. حال برمی‌گردیم به دایره که شکل آن قطعاً از شکل کلیه خیلی بهتر است. منظورم این است که دایره هم منحنی است ولی انحنای آن از انحنای کلیه کامل‌تر است. دایره‌ای به شعاع ۱ اختیار می‌کنیم. چگونه می‌توان از این دایره، دایره‌ای به شعاع ۲ به دست آورد؟



یکی از شاگردان. شعاع رایک واحد بزرگتر می‌گیریم.

سرژلانگ. با کدام ضریب ۱ یا ۲؟ شعاع دیگری را در نظر بگیرید. چگونه می‌توان از دایره‌ای به شعاع ۱،دایره‌ای به شعاع ۱۰ به دست آورد؟

شاگرد. شعاع را در عامل ۱۰ بزرگ می‌کنیم.

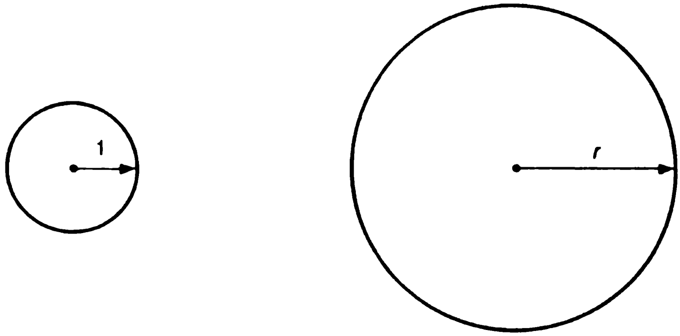
سرژلانگ. شعاع را در عامل ۱۰ بزرگ می‌کنیم. به طور کلی چگونه می‌توان از دایره‌ای به شعاع ۱ دایره‌ای به شعاع r به دست آورد؟

شاگرد. آن را در عامل شعاع r بزرگ می‌کنیم.

سرژلانگ. با عامل r. درست است؟ پس می‌توان گفت هر دایرهٔ به شعاع r، در حقیقت، از

تجنیس دایره‌ای به شعاع ۱ در نسبت r حاصل شده است، قبول داری؟

شاگرد. بله.



سرژلانگ. و دایرهٔ به شعاع $\frac{1}{2}$ از تجنیس دایره‌ای به شعاع ۱ در نسبت $\frac{1}{2}$ به دست می‌آید. حال فرض کنید که مساحت دایرهٔ به شعاع ۱ را می‌دانید، در این صورت مساحت دایرهٔ به شعاع ۲ چقدر خواهد بود؟ مساحت دایرهٔ به شعاع ۱ را A فرض کنید در این صورت، مساحت دایرهٔ به شعاع ۲ چقدر می‌شود؟

شاگرد. ۴A.

سرژلانگ. درست است! اسم شما چیست؟

شاگرد. هو.

سرژلانگ. آفرین هو. ۴A. و مساحت دایره‌ای به شعاع ۱۰، چقدر می‌شود؟

شاگرد دیگر. ۱۰۰A.

سرژلانگ. و مساحت دایره‌ای که شعاع آن $\frac{1}{2}$ است، چقدر می‌شود؟ راچل.

راچل. یک چهارم A.

سرژلانگ. صحیح. مساحت دایرهٔ به شعاع r چقدر است؟

راچل. r^2؟

سرژلانگ. r^2؟ [می‌پرسد]

راچل. r^2A.

سرژلانگ. r^2A. پیدا شد. حالا فهمیدید که r^2 از کجا آمد؟ این هم از r^2. ضمناً، در مفهوم دایره ابهامی هست. آنچه که دایره خوانده می‌شود همین خط است. اگر منظور درون دایره باشد، برای آنکه تمایزی قائل شده باشیم، آن را قرص (دیسک) می‌نامیم. مثل فریزبی[1] [نام

---

[1] frisbee.

تجاری یک نوع دیسک است ـ م] آن را قرص می‌نامیم چون یونانیان بر آن چنین نامی نهادند. اگر یونانیان آن را فریزبی می‌خواندند، ما نیز چنین می‌کردیم.

بنابراین می‌توانیم بگوییم مساحت قرص به شعاع r، r^2A است. در اینجا، A مساحت قرصی است به شعاع ۱، خوب، به مساحت قرص به شعاع ۱ باید نامی داده شود. این همان چیزی است که ما آن را پی می‌نامیم. بنابراین π را این طور تعریف می‌کنم: مساحت قرص است به شعاع ۱.

π را با آن عدد مساوی می‌گیریم تا به هدف خود برسیم. البته فرض را براین می‌گیریم که واحدی داریم، هر واحدی که شما مناسب می‌دانید و π را به همان صورت که گفتیم تعریف می‌کنیم: مساحت قرصی به شعاع ۱ است.

بنابراین، با توجه به این تعریف، بنابر آنچه دیدیم، مساحت قرصی به شعاع r، می‌شود πr^2. مساحت قرص به شعاع ۱ را قبلاً A نامیدیم و الآن، آن را π می‌خوانیم. یعنی همان مقدار ثابت. بااستفاده از این تعریف π، r^2 رانیز توضیح دادیم. این هم از فرمول مساحت. قبول؟ سؤالی نیست؟ ادامه بدهم؟ [کسی سؤال نمی‌کند.]

بسیار خوب، به مسئلهٔ اصلی خودمان برگردیم، به آنجایی‌که دو سؤال مطرح بود. مساحت قرص و محیط دایره. حساب مساحت را رسیدیم، می‌ماند محیط. و قضیه این است:

قضیه. محیط دایره‌ای به شعاع r مساوی $2\pi r$ است.

حالا قضیه‌ای داریم. محیط دایره را c بنامیم. از تعریف π شروع کردیم و رسیدیم به πr^2، و حالا می‌خواهیم ثابت کنیم که: $c=2\pi r$

آنچه را می‌خواهم انجام دهم این است: می‌خواهم باتدبیری حساب شده، از فرمول πr^2 ، فرمول $2\pi r$ را نتیجه بگیرم. اشکالی که ندارد؟ گله‌ای هست؟

[خنده.]

شاگرد. نه، گله‌ای نیست.

شاگرد دیگر. تا حالا نه!

سرژ. چرا به جای شعاع از قطر استفاده نمی‌کنید؟

سرژلانگ. فرمول را می‌شد این طور نوشت: $c=\pi d$، d قطر است.

شاگرد. ولی چرا قطر؟ از کجا می‌دانید که می‌شود $2r$؟

سرژلانگ. فعلاً باورنکن. این دقیقاً همان چیزی است که می‌خواهیم آن را ثابت کنیم گزاره‌ای گفتم که هنوز درستی آن را ثابت نکرده‌ام. کل مطلب همین است: اثبات درستی این فرمول. هنوز ثابت نکردم. باید برهانی ارائه داد. شاید این طور باشد، این حقیقت شایان

توجه است که همان مقدار ثابت که در فرمول مساحت ظاهر شد، در فرمول محیط نیز پدیدار شود. عیناً همان π. محتوای قضیه دقیقاً همین است. آنچه که در فرمول آمده، دقیقاً این است: πd، پی در قطر.

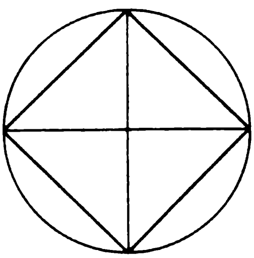
در نگاه اول، چیزی به عقل نمی‌رسد که چرا فرمول باید این طور باشد منظورم این است که می‌توانست هر چیز دیگری باشد. حالا اگر به آن شکل در آمد، من مقصر نیستم. چه بگویم، کار خدا است: [خنده.]، خودم این فرمول را به این صورت در نیاوردم. کار کار دیگری است. ولی شما علت را از من می‌پرسید، من هم به شما جواب می‌دهم. معنای «برهان» هم همین است. [خنده.] پس کلمهٔ برهان را می‌نویسم:

برهان.

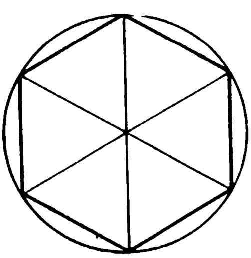
می‌خواهم برهان را بگویم. اسم شما چیست؟

شاگرد. شریل.

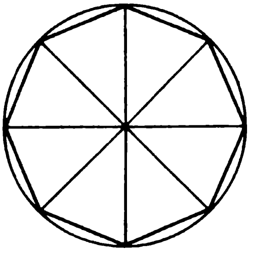
سرژلانگ. خوب، شریل می‌پرسد چرا. [خندهٔ بلند.] سرژ هم می‌پرسد چرا.[خنده] من به این چرا پاسخ می‌دهم.خوب چه کار کنم؟ دوباره از روش تقریب استفاده می‌کنم. دربارهٔ مساحتها فقط به فرمول مساحتهای مستطیل و مثلث یقین داریم. آنها را به کار می‌گیریم. دایره‌ای داریم که شعاع آن r است. با استفاده از چند مثلث، اندازهٔ تقریبی آن را به دست می‌آوریم. در مرحلهٔ اول، از چهار مثلث استفاده می‌کنم، به این شکل:

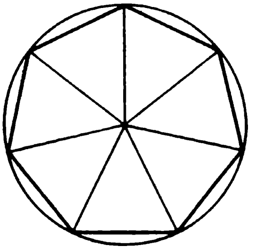


چهار مثلث را می‌بینید. این تقریب خیلی اجمالی است. چنگی به دل نمی‌زند. به همین دلیل، در دایرهٔ به شعاع r، مثلثهای بیشتری را در نظر می‌گیریم، مثلاً شش مثلث.



اندازهٔ تقریبی دایره را می‌توان با هفت و یا هشت مثلث، و یا مثلثهای بیشتری به دست





آورد. هر چه تعداد مثلثها بیشتر شود، تقریب بهتر و بهتر می‌گردد.

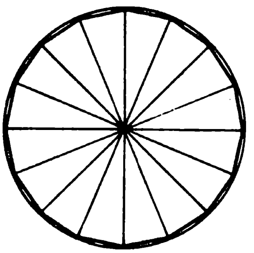
با چند ضلعی منتظم آشنا هستید؟ بله؟ بسیار خوب، با استفاده از چند ضلعی اندازهٔ تقریبی دایره را تعیین می‌کنیم. اول از مربع که چهار ضلع دارد استفاده کردیم اگر چند ضلعی منتظم شش ضلع داشته باشد، آن را چه می‌نامید؟ به چند ضلعی منتظمی که شش ضلع داشته باشد چه می‌گویند؟

یکی از شاگردان. شش ضلعی منتظم.

سرژلانگ. درست است. شش ضلعی. من فقط آنچه را که شما می‌دانید کنترل می‌کنم.

[سرژلانگ به شکلهای قبلی که آنها را روی تخته سیاه رسم کرده اشاره می‌کند]

پس در اینجا چهار مثلث داریم، شش مثلث، هفت مثلث و البته باز هم می‌توانیم مثلثهای بیشتری را اختیار کنیم. هر چه مثلث بیشتری اختیار می‌کنیم، به دایره نزدیک و نزدیکتر می‌شویم. قبول؟ [سرژلانگ، در همه این مدت مشغول کشیدن شکلها روی تخته سیاه بوده است.] حالا، در این دایره، n مثلث رسم می‌کنیم، n یک عدد اختیاری است.



گفتن n برای شما تازگی که ندارد؟

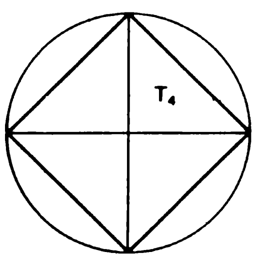
یکی از شاگردان. عدد نامشخصی است.

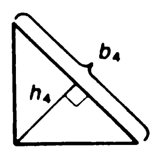
سرژلانگ. بله مورد خاصی را نمی‌خواهیم مطرح کنیم، قصد داریم وضعیت کلی در نظر

بگیریم. به همین دلیل از n استفاده می‌کنیم. n حواس شما را پرت نمی‌کند؟

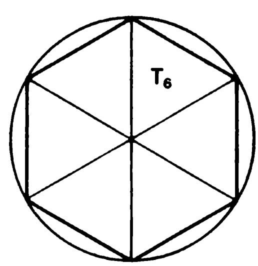
یکی از شاگردان: نه

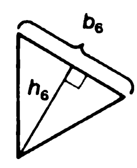
سرژلانگ. بسیار خوب، پس این کار را می‌کنیم. اندازه تقریبی دایره را با استفاده از چند ضلعیهای منتظم به دست می‌آوریم. پس مساحت تقریبی دایره برابر است با مساحت مثلثها و محیط چند ضلعی منتظم مساوی است با محیط تقریبی دایره، در اینجا، در مربع، تقریب چندان رضایت‌بخش نیست، مثلث مشخصی داریم که چهار بار تکرار شده است. در شکل بعدی، مثلث معین دیگری است که شش مرتبه تکرار شده است. در آنجا، مثلث، هفت‌بار تکرار شده است. درست؟ برای هر کدام از این مثلثها اسمی تعیین می‌کنم. مثلاً مثلث اولی را $T_۴$ می‌خوانم. ۴ نشان دهنده تعداد مثلثها است. قاعدهٔ آن مثلث را $b_۴$ و ارتفاع آن را $h_۴$ می‌نامم. مثلث $T_۴$، چهار دفعه تکرار شده است.

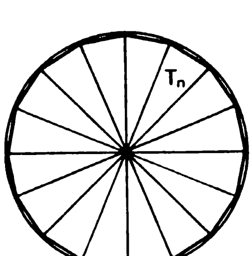


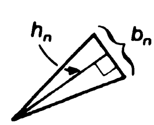


به این ترتیب، مثلث $T_۶$ دارای قاعدهٔ $b_۶$ و ارتفاع $h_۶$ است. مثلث $T_۶$، شش مرتبه تکرار شده است.









و در آنجا، مثلث $T_۷$ را داریم که هفت بار تکرار شده است و به طور کلی، مثلث T_n را اختیار می‌کنیم که n بار تکرار می‌شود. قاعده این مثلث را b_n و ارتفاع آن را h_n می‌نامیم.

مساحت T_n چقدر است؟ مساحت مثلث را چطور حساب می‌کنند؟

شریل. نصف b_n در h_n.

سرژلانگ. شما از من جلوتر حرکت می‌کنید. آهسته گام برداریم تا همه برسند. مساحت $T_۴$ مساوی است با $\frac{۱}{۲} b_۴ h_۴$. شریل جواب کلی را داد. خوب، قدم به قدم. مساحت $T_۶$ چقدر است؟

یکی از شاگردان. نصف $b_۶$ در $h_۶$.

سرژلانگ. بله، ومساحت $T_۷$؟ می‌شود $\frac{۱}{۲} b_۷ h_۷$. و سرانجام، مساحت T_n چقدر است؟ شریل قبلاً به این سؤال جواب داده است.

یکی از شاگردان. نصف h_n در b_n.

سرژلانگ. صحیح. حالا آیا ایرادی دارد که من این شکل راکه اندیس n دارد نگاه دارم و بقیه تخته سیاه را پاک کنم؟ چون به آن احتیاج دارم. شکلهای دارای ۴، ۶ و ۷ و مثلث را به این جهت انتخاب کردم تا به تعمیم n راه یابم. نیاز من فقط با n برآورده می‌شود. درست؟ حالا، مساحت چند ضلعی چقدر است؟

شاگرد. مساحت T_n ضرب در n.

سرژلانگ. درست است. اسم شما چیست؟

شاگرد. چارلی.

سرژلانگ. چارلی درست گفت. مساحت چند ضلعی، n برابرِ مساحت T_n.
بعبارت دیگر، n برابرِ $\frac{۱}{۲} b_n h_n$، پس داریم:

$$A_n = n \times \frac{۱}{۲} b_n h_n = \frac{۱}{۱} n b_n h_n.$$

و محیط n ضلعی چقدر است؟

شریل. n برابرِ b_n.

سرژلانگ. صحیح. فرمول را در آنجا می‌نویسم:

$$L_n = n b_n$$

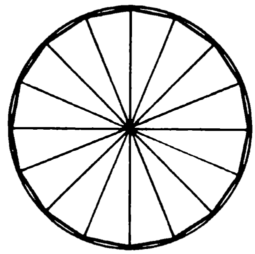
آدولف، مطلب را دنبال می‌کنی؟ حواست هست؟

آدولف. بله.

سرژلانگ. چون مساحت n ضلعی مساوی است با $A_n = \frac{۱}{۲} n b_n h_n$ این عبارت را می‌توانم این‌طور بنویسم:

$$A_n = \frac{۱}{۲} L_n h_n,$$

در این فرمول L_n محیط n ضلعی است.
فرض کنید n را عدد بزرگی اختیار کرده باشیم. در این صورت تعداد اضلاع چند ضلعی بیشتر می‌شود و به دایره نزدیکتر می‌گردد.



با بزرگتر و بزرگتر شدن n، کار به جایی می‌رسد که دیگر نمی‌توان رسم چند ضلعی را ادامه داد. وقتی که n خیلی بزرگ می‌شود، مقدار سمت راست این فرمول یعنی $\frac{1}{2}L_n h_n$ به چه چیزی نزدیک می‌شود؟ چارلی، طول L_n به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

چارلی. به محیط دایره.

سرژلانگ. درست است و ارتفاع h_n به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

شاگرد. به شعاع.

سرژلانگ. آفرین. اسم شما چیست؟

شاگرد. جو.

سرژلانگ. جو می‌گوید وقتی که n بسیار بزرگ می‌شود، h_n به شعاع دایره نزدیک می‌شود آفرین ـ چارلی، جو، شریل، سرژ...[خنده.]، راچل .... به خاطر سپردن همهٔ اسمها، یک دفعه، مشکل است. بنابراین h_n به شعاع نزدیک می‌شود. [سرژلانگ روی تخته سیاه می‌نویسد و گچ تمام می‌شود.]

یکی از شاگردان. درکشو گچ هست [خنده.]

سرژلانگ. پس در سمت راست این تساوی

$$A_n=\frac{1}{2}L_n h_n$$

L_n به محیط دایره نزدیک می‌شود و h_n به شعاع دایره نزدیک می‌شود. در طرف چپ، مساحت A_n، مساحت چند ضلعی به چه چیزی نزدیک می‌شود؟ اجازه بدهید از دانش‌آموز دیگری بپرسم. [سرژلانگ به شاگرد دیگری اشاره می‌کند.]

شاگرد. به پی؟ [سرژلانگ ابروهای خود را بالا می‌برد.] نه...

سرژلانگ. دایره‌ای داریم که شعاع آن r است قبول کردیم که مساحت دایره به شعاع r می‌شود؟

شاگرد. πr^2.

سرژلانگ. خوب. پس سمت چپ به πr^2 نزدیک می‌شود، و طرف راست به $\frac{1}{2}cr$ نزدیک می‌شود. بنابراین داریم:

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} cr.$$

حالا، با استفاده از جبر، چه کار باید کرد، چارلی

چارلی. باید r ها را حذف کرد.

سرژلانگ. بله، از هر طرف یک r برمی‌داریم، یک r از طرف راست و یک r از سمت چپ، در نتیجه

$$\pi r = \frac{1}{2} c$$

بعد چه کار باید کرد؟

چارلی. در ۲ ضرب می‌کنیم.

سرژلانگ. بله در ۲ باید ضرب کرد و نتیجه می‌شود؟

چارلی. πr ۲ مساوی c است.

سرژلانگ. بله، $\pi r = c$ ۲، این همان فرمولی است که قصد اثبات آن را داشتید. [همهٔ شاگردان می‌خندند] فهمیدید؟

از πr^2، که مساحت قرصی به شعاع r است، شروع کردیم و بعد با استفاده از تقریب، و با محاسبهٔ محیط چند ضلعی و مساحت آن و با فرض اینکه n به بی‌نهایت میل می‌کند، به مقدار تقریبی محیط و مساحت دایره دست یافتیم. سمت راست به $\frac{1}{2}cr$ نزدیک می‌شود و طرف چپ به مساحت قرص یا πr^2 می‌گراید. این را قبلاً ثابت کرده بودیم. و آنگاه با چاشنی جبر، یک r را حذف و با ضرب در ۲، به فرمول رسیدیم.

$$2\pi r = c.$$

این هم از فرمول شما، این برهان را قبول دارید؟ [سرژلانگ به راچل اشاره می‌کند.]

راچل. بله، [بالحن مردد]

سرژلانگ. قانع شدی؟

راچل. بله [باتبسم.]

سرژلانگ. این بلهٔ تو چه معنایی دارد؟ بله رودربایستی یا بلهٔ قانع شدن و یا بینابین؟

راچل. بینابین. [خنده]

سرژلانگ. خوب، کجا اشکال داری؟

راچل. نمی‌دانم.

سرژلانگ. نمی‌دانید؟ [خنده.] بسیار خوب، باید کاملاً قانع بشوی. ببین، از کجا شروع کردم؟ قبول داری که πr^2 مساحت دایره‌ای به شعاع r است بعد چه کار کردم؟ هان؟

راچل. دایره‌ای را کشیدید. [خنده.]

سرژلانگ. بله. دایره‌ای کشیدم. وبعد چه کار کردم؟

راچل. دایره را به چند مثلث تقسیم کردید.

سرژلانگ. صحیح. درون دایره را به چند مثلث تقسیم کردم. در داخل دایره یک چند ضلعی کشیدم و آن را به چند مثلث تبدیل کردم.

راچل. بله.

سرژلانگ. در اینجا، از منطق استفاده کردم. دربارهٔ مساحت مثلثها اختلافی نداریم. پس، چند ضلعی منتظمی را اختیار کردم که n ضلع دارد، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰،... و سپس به طور کلی n را به کار بردم. «n» حواست را که پرت نمی‌کند؟

راچل. نه

سرژلانگ. از روی رودر بایستی گفتی یا قانع شدی؟

راچل. نه قانع شدم.

سرژلانگ. تا اینجا رودربایستی نیست؟

راچل. تا اینجا کاملاً درست است.

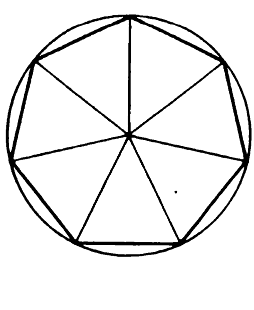
سرژلانگ. تا اینجا کاملاً درست است. [خنده] مساحت هر مثلث چقدر است؟

راچل. نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع.

سرژلانگ. نصف حاصل ضرب قاعده در ارتفاع، این را خودت گفتی. پس در اینجا هم رودربایستی نیست.

راچل. نه، قانع شدم.

سرژلانگ. خوشحالم که قانع شدید [خنده] بسیار خوب. مساحت چند ضلعی چقدر می‌شود؟ چند مثلث داریم؟



[سرژلانگ یک بار دیگر شکل را می‌کشد.]

راچل. [می‌شمارد]. یک، دو، سه، ...، هفت ـ n

سرژلانگ. n مثلث، درست. و اگر مساحت هر مثلث را داشته باشیم و بدانیم که مساحت این n مثلث همگی به یک اندازه‌اند. در آن صورت مساحت چند ضلعی چقدر می‌شود؟

راچل. n برابر مساحت یک مثلث.

سرژلانگ. بنابراین مساحت چند ضلعی n برابر $\frac{1}{2} b_n h_n$ است.

تا اینجا کاملاً درست است؟

راچل. بله.

سرژلانگ. قانع شدی؟

راچل. بله [لبخند می‌زند.]

سرژلانگ. بسیار خوب. گام بعدی چه بود؟ $\frac{1}{2}$ که $\frac{1}{2}$ است. و بعد b_n را n بار اختیار کردم، n برابرِ قاعده. محیط چند ضلعی چقدر است؟ چند ضلعی را می‌بینی؟ چند ضلع دارد؟

راچل. هفت تا ـ آه، ببخشید، n.

سرژلانگ. بسیار خوب. از عدد مشخص ۷ شروع کردی و بعد ذهنت تعمیم کرد ؟ و n را گفتی، این نشان می‌دهد که مطلب را فهمیدی. بالاخره گفتید n ضلع ...

راچل. بله.

سرژلانگ. اندازهٔ طول هر ضلع b_n است. بنابراین محیط چند ضلعی چقدر می‌شود؟

راچل. n بار b_n.

سرژلانگ. بله، در اینجا، n بار b_n را می‌بینید؟

راچل. بله،

سرژلانگ. پس nb_n را به دست آوردیم، که همان L_n، محیط n ضلعی، پس مساحت n ضلعی مساوی است با

$$A_n = \frac{1}{2} L_n h_n$$

قانع شدی یا از روی رودربایستی جواب می‌دهی؟

راچل. قانع شدم.

سرژلانگ. بسیارخوب. حالا فرض کن که n بزرگتر و بزرگتر می‌شود تا آنجا که به محیط دایره نزدیکتر و نزدیکتر می‌شود. این مقادیر به چه چیزی نزدیک می‌شود؟ $\frac{1}{2}$ به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود. محیط چند ضلعی به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

راچل. به محیط دایره.

سرژلانگ. [به کلاس:] این حرفی است که او زد، محیط دایره. [به راچل.] قانع شدی یا از

روی رودربایستی جواب می‌دهی؟

راچل. قانع شدم.

سرژلانگ. h_n به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

راچل. به شعاع دایره.

سرژلانگ. دقیقاً همین است. پس حاصل ضرب این سه مقدار، به نصف محیط ضرب در شعاع نزدیک می‌شود. متوجه شدی؟ تا اینجا اشکالی نداری؟

راچل. نه.

سرژلانگ. قانع شدی یا از روی رودربایستی جواب می‌دهی؟

راچل. قانع شدم [لبخند می‌زند.]

سرژلانگ. بسیار خوب. A_n ، مساحت n ضلعی را داریم که به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

راچل. به مساحت دایره.

سرژلانگ. که مساوی است با؟

راچل. πr^2

سرژلانگ. بسیار خوب. پس به این نتیجه رسیدیم که πr^2 مساوی است با $\frac{1}{2}cr$

راچل. تا اینجا مسئله‌ای ندارم!

سرژلانگ. تااینجا مسئله‌ای نیست. خوب، حالا اگر داشته باشم

$$\pi r^2 = \frac{1}{2}cr$$

یک چیزی در وجودمان به ما می‌گوید که باید برای معادله کاری بکنیم [خنده]. احساس تو چیست؟

راچل. این را به $2\pi r = c$ تبدیل کنم.

سرژلانگ. بله، در واقع چه کار کردی؟

راچل. r را حذف کردم و بعد دو طرف را در ۲ ضرب کردم و بعد رسیدم به $2\pi r = c$.

سرژلانگ. این فرمولی است که قصد اثبات آن را داشتم!

راچل. ثابت کردید. [خنده.]

سرژلانگ. آن را ثابت کردم. حالا، باز هم رودربایستی هست؟

راچل. نه، نیست. [با قاطعیت گفت.]

سرژلانگ. نیست ؟!... [خنده.] پس پیروز شدیم. ریاضیات پیروز شد.

راچل. درست است.

[سرژ دست خود را بالا می‌برد.]

سرژلانگ. بله؟

سرژ. این فقط یک تقریب است.

سرژلانگ. نه. تا میزان n فقط یک تقریب، ولی اگر حد را در نظر بگیرم، به چیزی که این مقادیر به آن می‌رسند، دیگر تقریب به شمار نمی‌آید.

سرژ. با این حال، به نظر من محیط n ضلعی هرگز به محیط دایره نمی‌رسد. اگر دایره را برعددی تقسیم کنید .... حتی اگر عدد بی نهایت با شد ....

سرژلانگ. بر عدد بی‌نهایت تقسیم نکردم. من از کلمهٔ «نزدیک شدن» استفاده کردم. قبول داری که مساحت چند ضلعی به مساحت قرص نزدیک می‌شود؟

سرژ. بله. ولی هرگز کاملاً به آن نزدیک نمی‌شود.

سرژلانگ. نه،کاملاً نزدیک نمی‌شود، ولی به آن نزدیک می‌شود. مساحت قرص هر چه باشد، مساحت n ضلعی به آن نزدیک می‌شود.

سرژ. بله، ولی هرگز کاملاً به آن نمی‌رسد، این کار دقیق نیست.

سرژلانگ. چه چیزی دقیق نیست؟ [سرژلانگ و سرژ هر دو هم‌زمان حرف می‌زنند.] روی تخته سیاه می‌نویسم. مساحت دایره را دارم که مساوی است با πr^2 مساحت A_n یعنی n ضلعی را دارم مساحت A_nبه مساحت دایره نزدیک می‌شود. من نمی‌گویم که کاملاً با آن برابر است، به آن نزدیک می‌شود.

سرژ. وقتی که کاملاً به آن نمی‌رسد، چطور می‌گویید ....

سرژلانگ. از حرف شما سر در نمی‌آورم. منظور شما از «هرگز کاملاً نمی‌رسد» چیست؟

[سرژلانگ و سرژ هم زمان با هم حرف می‌زنند.]

سرژ. مساحت چند ضلعی هرگز عین مساحت دایره نمی‌شود.

سرژلانگ. نه، نمی‌شود. درست است.

سرژ. بسیار خوب، پس چطور می‌توانید بگویید فرمول شما دقیق است؟

سرژلانگ. آه. مساحت n ضلعی به مساحت دایره نزدیک می‌شود. مساحت n ضلـعی، $\frac{1}{2}L_n h_n$ است. $\frac{1}{2}L_n h_n$ به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

سرژ. خوب، آخر...

سرژلانگ. عدد $\frac{1}{2}L_n h_n$ به چه نزدیک می‌شود؟

سرژ. به $\frac{1}{2}cr$.

سرژلانگ. درست است. از این طرف، مساحت n ضلعی به πr^2 نزدیک می‌شود؛ از آن

طرف، عدد $\frac{1}{2}L_n h_n$، که مساوی با مساحت است، به $\frac{1}{2}cr$ نزدیک می‌شود. اگر عبارتی در دست داشته باشم که به دو عدد نزدیک می‌شود، عبارت یکی است، پس به ناچار آن دو عدد باید مساوی باشند.

سرژ. آه، متوجه منظور شما شدم.

سرژلانگ. وقتی که: $A_n=\frac{1}{2}L_n h_n$ را می‌نویسم در اینجا علامت تساوی دارم. این علامت تساوی، تقریب نیست، دقیقاً همان تساوی است. درست است؟ از طرفی، عدد A_n به πr^2 نزدیک می‌شود، از طرف دیگر، همان عدد، یعنی $\frac{1}{2}L_n h_n$ به $\frac{1}{2}cr$ نزدیک می‌شود. بنابراین یک عدد به دو چیز امکان پذیر نزدیک می‌شوند، بنابراین آن دو چیز امکان‌پذیر به ناچار باید متساوی باشند.

سرژ. آهان. درست است.

سرژلانگ. متوجه شدی، همین جواب را می‌خواستی.

سرژ. بله همین بود.

سرژلانگ. کسی هست که این مطلب برایش جا نیفتاده؟ استدلال را فهمیدی؟

[سرژلانگ به شاگردی اشاره می‌کند.]

شاگرد. بله.

سرژلانگ. اسم شما چیست؟

شاگرد. مایک.

سرژلانگ. مایک، لطفاً استدلال را یک‌بار دیگر از اول بگو! [خنده.]

مایک. باشد. دایره‌ای داشتید و [خنده]، آن را قسمت قسمت کردید. خوب، شعاع r است. دایره را به n قسمت تقسیم کردید. n هر عددی می‌تواند باشد. دایره را به مثلثهای کوچکی تقسیم کردید، مساحت مثلث هم برابر است با نصف قاعده در ارتفاع.

سرژلانگ. بله.

مایک. قاعدهٔ مثلث b_n و ارتفاع مثلث h_n است. پس مساحت می‌شود نصف $b_n h_n$

سرژلانگ. درست است.

مایک. بعد آن را در n ضرب کردید، یعنی عددی که انتخاب کردید. [خنده]. و بعد n بار b_n محیط می‌شود و یا L_n. پس نصف $L_n h_n$ برابر است با نصف c در r ...

سرژلانگ. به آن نزدیک می‌شود، برابر نیست.

مایک. آه، نزدیک می‌شود. نصف c در r، و πr^2 مساوی است با $\frac{1}{2}cr$ از هر دو طرف یک r را حذف کردید؛ بعد دو طرف را دو برابر کردید و از آن نتیجه گرفتید که $2\pi r$ مساوی

است با c.

سرژلانگ. آفرین. واقعاً آن را فهمیدی! [به کلاس] فهمیدید مایک چه گفت؟ او توانست همهٔ برهان راتکرار کند، همهٔ آن را، همهٔ زنجیرهٔ افکار. عالی بود. آفرین.

ملاحظات

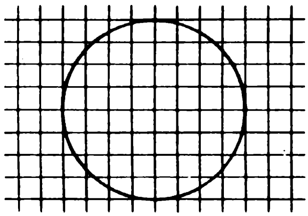
درس، عکس‌العمل واقعاً مطلوبی در پی داشت. پس از پایان درس،یکی از معلمین به من گفت زمانی که من به راچل عبارات قانع شدن و رودربایستی را پی‌درپی می‌گفتم نگران او بوده است که مبادا طاقت تحمل این فشار را از دست بدهد ولی نه تنها تاب آورد(چنانچه واقعاً فشار روحی در میان باشد) بلکه به تدریج اعتماد به نفس خود را باز یافت و لحن پاسخ او از دودلی به قاطعیت تبدیل شد، متأسفانه آهنگ و احساس نهفته در کلام را نمی‌توان روی کاغذ آورد.

هیچگاه شاگردی را اینگونه استنطاق نکرده‌ام. من چاره‌ای جز تصمیم‌گیری سریع نداشتم. شاگرد با این گفتگو یا واقعاً در محذور و منگنهٔ شدید قرار می‌گرفت و یا برعکس، این فشار او را به سطح جدید از آگاهی می‌رساند. حسن ختامی که از مایک سرزد و توانست همهٔ برهان را تکرار کند، موفقیت چشمگیری بود. از جمله ایراداتی که در برنامه تحصیلی مدارس در سطوح مقدماتی و دبیرستانی وجود دارد این است که بر مطالب فنی بیش از حد لازم تأکید دارد، مطالب آن از هم گسیخته است و به تحرک (به تعبیری که در موسیقی رایج است) توجه نمی‌شود. مطلبی را که انتخاب کردم تحرک خاصی دارد. دیدن دوران چرخهای ذهنی، که در تعبیر بی‌آلایش مایک، هنگام تکرار برهان متجلی شد، تماشایی بود. مایک در موقعیتی قرار داشت که می‌بایست همهٔ برهان را بر زبان مـی‌آورد، جملات را ردیف می‌کرد، برخی از هماهنگیها را انجام می‌داد، به دنبال شکار کلمه‌ها می بود و تسلسل افکار خود را از دست نمی‌داد، این کار به او و به بقیهٔ کلاس و به من لذّت می‌داد.

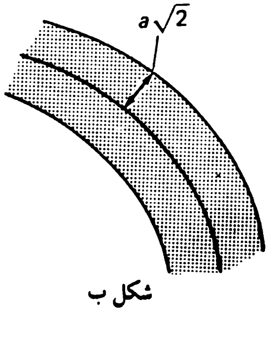
اگر بخواهیم بحث تقریب را در قسمت اول برهان (راجع به تغییر مساحت ناشی از تجانس) در سطح پیشرفته‌تری بررسی کنیم، باید به مطالب گفته شده در کلاس، چندکلمه‌ای افزود ولی وقت کافی برای این کار نداشتم، چون نمی‌خواستم قسمت دوم برهان ناتمام بماند.

چنانچه ساعتی دیگر در اختیارم قرار می‌گرفت، دلایل این نوع تغییر در مساحت را بر

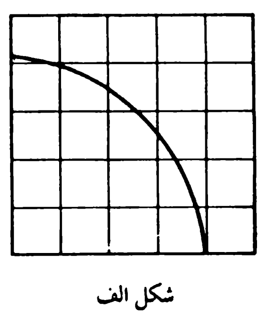
این اساس توضیح می‌دادم. شبکه‌ای را در نظر بگیرید که از خطوط افقی و عمودی تشکیل شده باشد:



برای تعیین مساحت تقریبی قرص، می‌توانستیم همهٔ مربعهای درون دایره را بشماریم، اضلاع آنها را اندازه بگیریم، مساحت آنها را با هم جمع کنیم، و تقریب مورد نظر را به دست آوریم. ولی ما می‌خواهیم میزان سودمندی تقریب را برآورد کنیم. اختلاف بین مجموع مساحتهای همهٔ مربعهای کوچک موجود در قرص و مساحت واقعی قرص از اجزاء آن مربع‌هایی به‌دست‌می‌آید که در مرز قرص یا دایره واقعند. بنابر شهود فطری خود می‌دانیم که اگر این شبکه به اندازهٔ کافی ظریف باشد، مجموع این مربع‌ها، بسیار ناچیز خواهد بود. این ناچیزی را می‌توان برآوردکرد. فرض کنید شبکه‌ای را طوری رسم کرده باشیم که ضلع مربع‌ها برابر a باشد. قطر چنین مربعی مساوی $a\sqrt{2}$ است. اگر مربعی، دایره را قطع کند. آنگاه فاصلهٔ هر نقطهٔ مربع از دایره حداکثر $a\sqrt{2}$ است. به شکل الف نگاه کنید.



شکل ب



شکل الف

به این دلیل است که فاصله هر دو نقطهٔ مربع از $a\sqrt{2}$ تجاوز نمی‌کند. کمربندی به عرض $a\sqrt{2}$ دور دایره همچنان که در شکل (ب) نشان داده شده است، رسم می‌کنیم. در این صورت همه مربع‌هایی که دایره آنها را قطع می‌کند در درون کمربند قرار می‌گیرند.

خردمندی حکم می‌کند که بپذیریم، مساحت کمربند حداکثر برابر است با

محیط دایره $\times ۲\mathrm{a}\sqrt{۲}$ ۲

بنابراین، اگر a را بسیار کوچک اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر شبکه را خیلی ظریف بگیریم، مساحت کمربند کوچک یا حداکثر $\mathrm{a}\sqrt{۲}\mathrm{L}$ ۲ می‌شود، L محیط دایره است.

در نتیجه، با جمع کردن مساحت آن مربع‌هایی از شبکه که دایره را قطع می‌کنند، خطای تقریب در مساحت قرص (دایره) را برآورد کرده‌ایم. اگر اندازهٔ مربع‌های شبکه به صفر نزدیک شود، این خطا به صفر میل می‌کند. بنابراین، با نزدیک شدن مربع‌های شبکه به صفر، مجموع مساحت مربع‌هایی که کاملاً در درون دایره قرار می‌گیرند، به مساحت قرص نزدیک می‌شود.

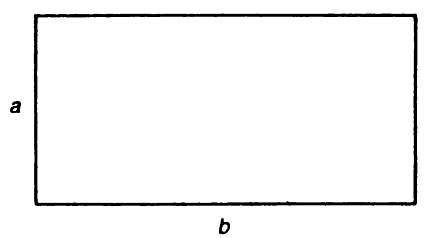
چنین استدلالی برای هر شکل منحنی صادق است.

و اما آخرین کلام، در گفتگوی دیگری، روش ساده‌تری برای استنتاج محیط دایره، $c=۲\pi r$ از مساحت قرص $A=\pi r^{۲}$ خواهید یافت. آن مطلب را می‌توان برای یافتن سطح کره نیز تعمیم داد.

تغییر حجم بر اثر افزایش بُعد

این گفتگو به دنبال «پی چیست؟» و در همان کلاس دهم در دبیرستانی در حومهٔ تورنتو که دانش‌آموزان آن حدوداً ۱۵ ساله بودند، ایراد شد و موضوع آن حجم شکلهای فضایی هرم و مخروط است.

سرژلانگ. امروز می‌خواهیم راجع به موضوعی بحث کنیم که شبیه صحبت دیروز ما است منتها با ابعاد بیشتر. ولی قبل از هر چیز نگاهی به شکلهای دو بعدی می‌اندازیم. یک بار دیگر، از مستطیل شروع می‌کنیم مستطیلی با طول و عرض a و b



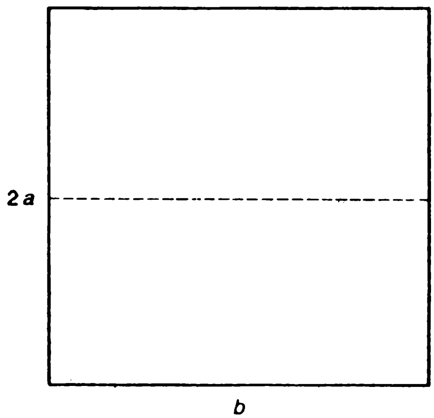
مساحت $=A=ab$

دیروز با نسبت r تجانسی را در همهٔ جهت‌ها برقرار کردیم. و دیدیم که به واسطه تجانس شکل می‌تواند یکنواخت کوچک و یا بزرگ شود ـ این عمل را تجانس نامیدیم. امروز می‌خواهم این نکته را اضافه کنم که ما می‌توانیم در شکلهای دو بعدی، چون دو جهت داریم، دو نسبت اختیار کنیم. مثلاً می‌توانیم جهتی را تغییر ندهیم و جهت دیگر را دو برابر کنیم. بنابراین طول این ضلع ۲a می‌شود ولی اندازهٔ ضلع دیگر همان b قبلی است.

اگر مساحت شکل اولی A باشد، مساحت شکل جدید چقدر می‌شود؟ شریل تو بگو.

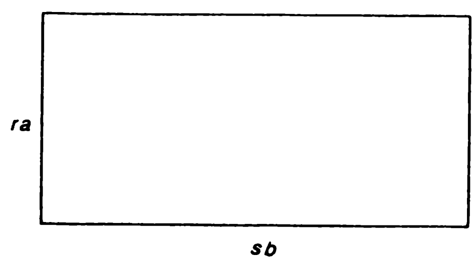
شریل. ۲A.

سرژلانگ. بله، ۲A. به‌طور کلی، اگر یک جهت را بانسبت r و جهت دیگر را با نسبت s بزرگ کنیم، مساحت شکل با چه نسبتی تغییر می‌کند؟
شریل. rsA ؟



مساحت $= 2ab = 2A$

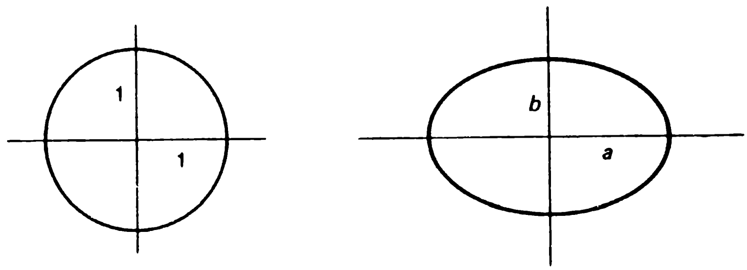
سرژلانگ. درست است. مساحت شکل جدید rsA خواهد بود.



مساحت $= rasb = rsab = rsA$

پس این مطلب را بنویسیم. اگر یک جهت را با نسبت r تجنیس کنیم و جهت دیگر را بانسبت s تجنیس کنیم در این صورت شکل با نسبت rs تغییر می‌کند.
ببینید، دیروز، هر دوجهت را بانسبت r تجنیس کردیم و دیدیم که مساحت شکل با نسبت r^2 تغییر می‌کند. امروز یک جهت را با نسبت r و جهت دیگر را با نسبت s تجنیس می‌کنیم. روشن شد؟ منظورم از دوجهت این است که در صفحه دو جهت عمود بریکدیگر اختیار می‌کنیم.
باز مثل دیروز، اول مستطیل را بررسی می‌کنیم. مساحتها به طور کلی چگـونه تـغییر می‌کنند؟ به آن شکلی که شبیه کلیه بود برگردیم، یا اصلاً کار راحتتر کنیم از دایره‌ای با شعاع

۱ شروع کنیم. دایره را از جهتی با a و از جهت دیگر با b تجنیس می‌کنیم، این طور:



دیروز گفتیم که مساحت دایره‌ای که شعاع آن ۱ باشد، مساوی π است. مساحت شکلی که از تجنیس دایره با دو نسبت مختلف a و b در دو جهت به دست می‌آید، چقدر است؟ از چه کسی بپرسم؟ جو می‌توانی بگویی؟

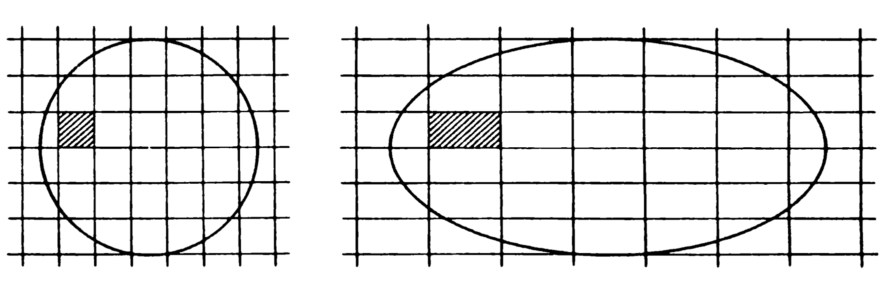
جو. πab

سرژلانگ. πab، درست است! راستی، می‌دانی شکلی که از تجنیس دایره با دو نسبت a و b از دو جهت مختلف حاصل می‌شود، چه نام دارد؟

یکی از شاگردان. بیضی.

سرژلانگ. درست است. این بود تعریف بیضی. دقیقاً همین است. از تعریف، نتیجه می‌گیریم مساحت بیضی مساوی πab است.

اگر شکل منحنی شبیه کلیه داشته باشیم، می‌توانیم مساحت تقریبی آن را با استفاده از مستطیل‌های کوچک به‌دست آوریم. اگر این شکل را از جهتی با a و از جهت دیگر با b تجنیس کنیم، مساحت هر یک از مستطیل‌ها با ab تغییر می‌کند و بنابراین مساحت تقریبی شکل منحنی نیز با نسبت ab تغییر می‌یابد



تا اینجا روی صفحه کار کردیم، حالا برویم سراغ ۳ بُعدیها.

شکل فضایی متناظر با مستطیل چیست؟ شکل ۳ بُعدی در قیاس با مستطیل چگونه است؟

شریل. آ ـ طول در عرض در ارتفاع.

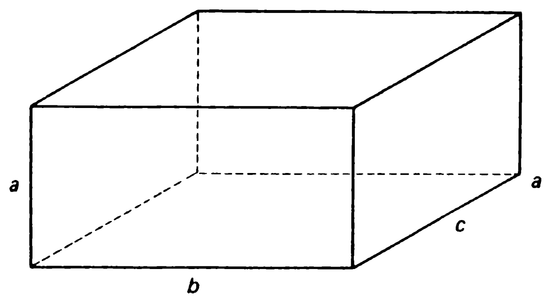
سرژلانگ. بله، در اینجا طول و عرض و ارتفاع داریم. بنابراین سه جهت داریم. با این خصوصیات چه شکلی شبیه مستطیل است؟

[بعضی از شاگردان، حدسهایی را بیان می‌کنند]

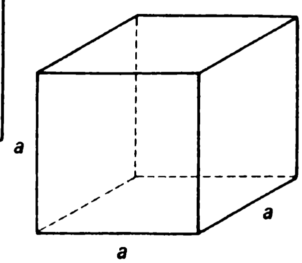
سرژلانگ. بسیار خوب، آن را جعبهٔ مستطیل می‌نامیم، باشد؟ نام دیگری برای آن دارید؟

شریل. مکعب؟

سرژلانگ. خوب است ولی مکعب، شکل خاصی از جعبه است، جعبه‌ای که تمام اطراف آن به یک اندازه باشد. مکعب نظیر مربع است. به شکلی که نظیر مستطیل باشد، مکعب مستطیل می‌گویند. شکل آن را رسم می‌کنیم. مکعب مستطیل را می‌بینید؟



مکعب مستطیل



مکعب

طول اضلاع این شکل را a و b و c فرض می‌کنیم. حجم آن چقدر می‌شود؟

شریل. abc.

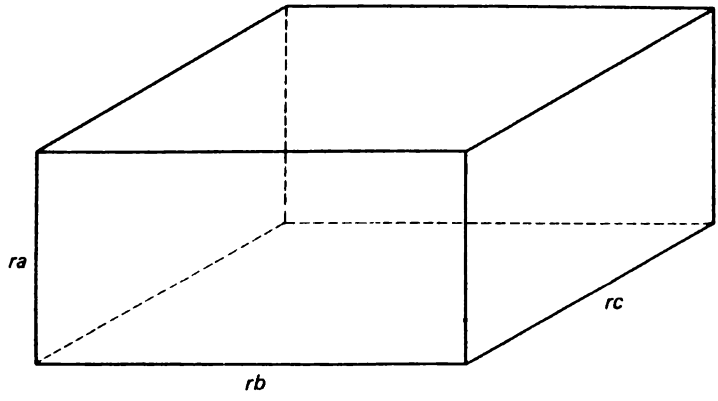
سرژلانگ. صحیح است، حجم مساوی حاصل ضرب این اضلاع است:

$$V=abc$$

حال اگر شکل را از همهٔ جهات و از سه بعد در نسبت r تجنیس کنیم در این صورت هر ۳ فاصله در این نسبت بزرگ می‌شوند.

[یکی از شاگردان میان حرف می‌پرد و از حجم شکلها صحبت می‌کند]

سرژلانگ. صبر کنید، صبر کنید! بگذارید آن را رسم کنم. من به شما نمی‌رسم [خنده] به این ترتیب، اضلاع مکعب مستطیل مجانس می‌شوند: ra و rb و rc.



در این صورت، حجم مکعب مستطیلی که از همهٔ جهات در عامل r تجنیس شده چقدر می‌شود؟ ببینم از چه کسی باید پرسید؟ [سرژلانگ به یکی از شاگردان اشاره می‌کند]

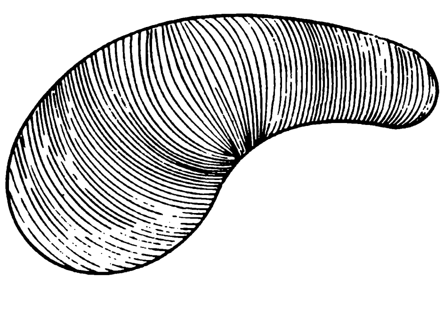
شاگرد. r^3abc.

سرژلانگ. درست است. r^3abc. احسنت. بنابراین، حجم شکل تجنیس شده می‌شود r^3V اگر V حجم شکل اولیه باشد. اسم شما چه بود؟

شاگرد. گری.

سرژلانگ. بله، یادم آمد. بگذارید ببینم ـ شریل، سرژ، راچل کجا است؟ آه آنجا، جایت را عوض کردی! داشتی گیجم می‌کردی. [خنده.] بسیار خوب پس حجم در نسبت r^3 تغییر می‌کند.

خوب، بگذارید نگاهی به شکل سه بعدی کلیه بکنیم. دیروز، موقعی منحنی دو بعدی را در r تجنیس کردیم، مساحت در نسبت r^2 تغییر کرد. حالا فرض کنید کلیه‌ای سه بعدی داریم



که حجم آن مقدار معین V باشد. آن را در نسبت r تجنیس می‌کنم. حجم شکل مجانس چقدر می‌شود؟

سرژ. r^3V.

سرژلانگ. باز هم r^3V چطور می‌شود این را ثابت کرد؟ دیروز از چه راهی آن را ثابت کردم؟

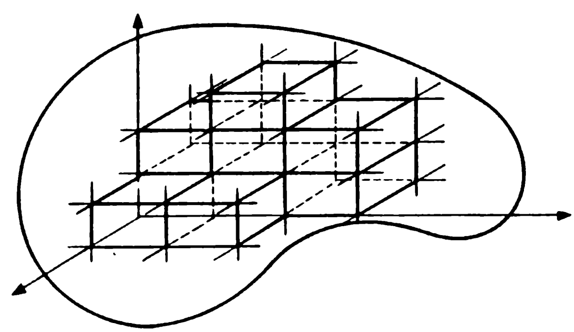
شاگرد. شبکه‌ای را رسم کردید.

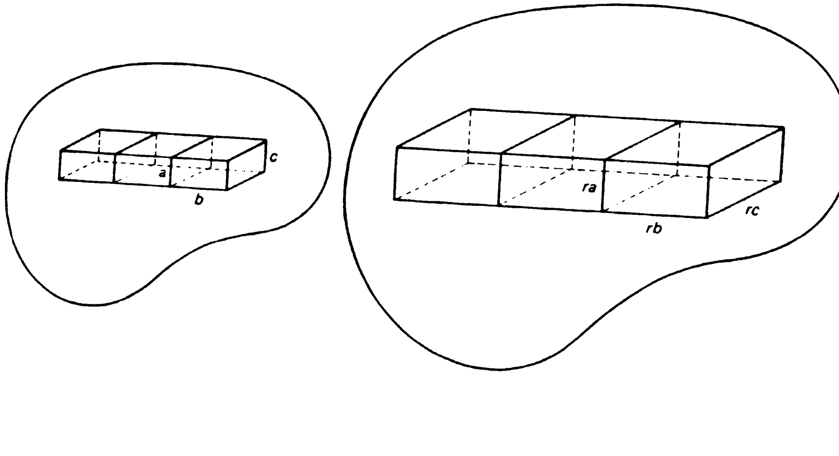
سرژلانگ. صحیح، شبکه‌ای کشیدم. دیروز، شبکه‌ای دو بعدی کشیدم و اندازهٔ تقریبی مساحت را بااستفاده از مستطیل های زیادی به دست آوردم. حالا شبکه‌ای سه بعدی می‌کشم. اسم شما چیست؟

شاگرد. ساندره.

سرژلانگ. بسیار خوب. پس برای اثبات باید شبکه‌ای سه بعدی کشید ولی یک کمی مشکل است.

سرژلانگ. [سعی می‌کند شبکه‌ای سه بعدی رسم کند] اگر شبکه‌ای سه بعدی بکشم، در این صورت می‌توانم با استفاده از همهٔ مکعب مستطیل‌هایی که در داخل کلیه قرار دارند، حجم تقریبی آن را به دست بیارم، تقریب بدی نیست. و اگر در نسبت r تجنیس کنم، مکعب مستطیلها هم تجنیس می‌شوند و حجم آنها هم در نسبت r^3 تغییر می‌کند.





همهٔ مکعب مستطیلها با این نسبت تجنیس می‌شوند. و چون مجموع مکعب مستطیل‌ها، حجم تقریبی کلیه را تعیین می‌کنند، می‌شود نتیجه گرفت که حجم واقعی کلیه هم در نسبت r^3 تغییر می‌کند. درست می‌گویم؟ ولی نمی‌توانم آن را خوب رسم کنم.

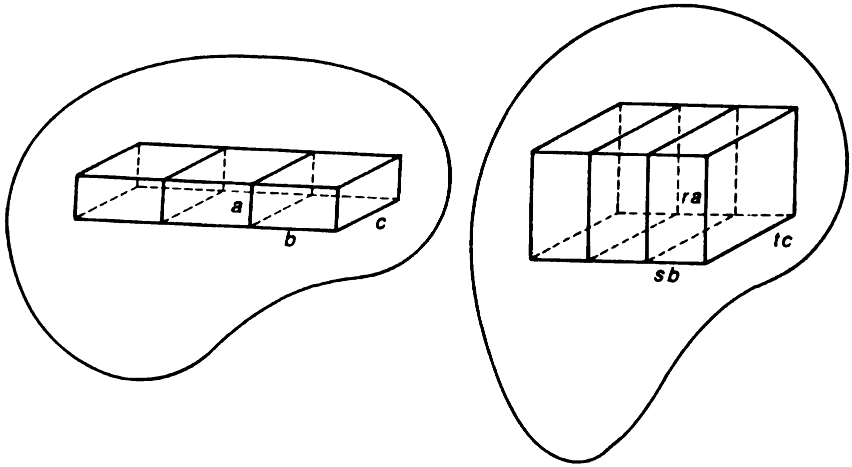
ضمناً، مثل شکلهای دو بعدی، می‌توانیم از جهتی در یک نسبت و از جهت دیگر در نسبت دیگری تجنیس کنیم. پس بگذارید آن را اینجا رسم کنم.

اول یک مکعب مستطیل می‌کشم، یک طرف آن را در r طرف دیگر در s و طرف سوم در t تجنیس می‌کنم. اگر حجم مکعب مستطیل اولی V باشد، حجم آن پس از تجانس چقدر می‌شود؟

شاگرد. rstv.

سرژلانگ. بله، پس حجم در حاصل ضرب سه نسبت تغییر می‌کند.

یکی دیگر از شاگردان. بله، حجم شکل می‌شود rasbtc ، یعنی rstabc و حجم در حاصل‌ضرب rst تغییر می‌کند.



سرژلانگ. و به همین قیاس، اگر همین تجانس را در یک شکل منحنی اِعمال کنم. یعنی با تشکیل شبکه‌ای سه بعدی و تعیین حجم تقریبی شکل با استفاده از مکعب مستطیل‌ها، می‌توانیم همین نتیجه را بگیریم. قبول دارید؟ [شاگردان تصدیق می‌کنند] پس می‌توانیم این قاعده کلی را داشته باشیم:

بر اثر تجانس در نسبتهای r و s و t، در سه بُعد، حجم شکلهای فضایی به نسبت rst تغییر می‌کنند.

همان طور که دیروز گفتیم: اگر هر دو طرف مساحت را در r تجنیس کنیم، مساحت در r^2

تغییر می‌کند و اگر یک طرف را در r و طرف دیگر را در s تجنیس کنیم، مساحت در rs تغییر می‌کند، دربارهٔ حجم هم همین طور، اگر یک طرف را در r و طرف دیگر را در s و طرف سوم را هم در t تجنیس کنیم، حجم در rst تغییر می‌کند. سه بُعد در جهات متعامدی قرار دارند.

پس از این، صحبت ما عمدتاً دربارهٔ سه بعدیها خواهد بود. ولی به طور طبیعی چه حکم کلی می‌توان از این حرفها گرفت؟ سرژ تو می‌دانی؟

سرژ. نه نمی‌دانم.

سرژلانگ. چطور می‌توان آنچه را که از تجانس فهمیدیم، عمومیت داد؟ از ۲ بعد شروع کردیم و بعد ۳ بعد...

سرژ. [صحبت را قطع می‌کند.] منظورتان چهار بعد، درست است. حاصل ضرب بَعدی، فهمیدم. rst هر چی [= هر چی $r\times s\times t\times$]

سرژلانگ. آه. rst هر چی. درست است. پس فرض کنیم شکل فضایی داریم که چهار بُعد داشته باشد. می‌دانید چهار بعد یعنی چی؟ این یکی را نمی‌توانم رسم کنم.

شاگرد. ایرادی ندارد، شما آن سه بعدی را هم نتوانستید رسم کنید.

سرژلانگ. نکتهٔ خیلی جالبی را گفتید. حرف شما کاملاً درست است. بنابراین درستی آن‌چه را که می‌گویم ارتباطی به توانایی من در رسم آن ندارد. پس فرض کنید یک شکل چهار بُعدی داشته باشیم و هر چهار طرف آن را در r تجنیس کنیم. حجم این شیء فضایی چگونه تغییر می‌کند؟ شریل تو می‌دانی؟

شریل. r به توان چهار در V [$r^4=V$]

سرژلانگ. r^4V موقعی که V حجم شیء چهار بعدی است. و فرض کنید یک شیء فضایی n بعدی داشته باشیم و تجنیسی در r از همهٔ جهات اِعمال کنیم حجم چه تغییری می‌کند؟

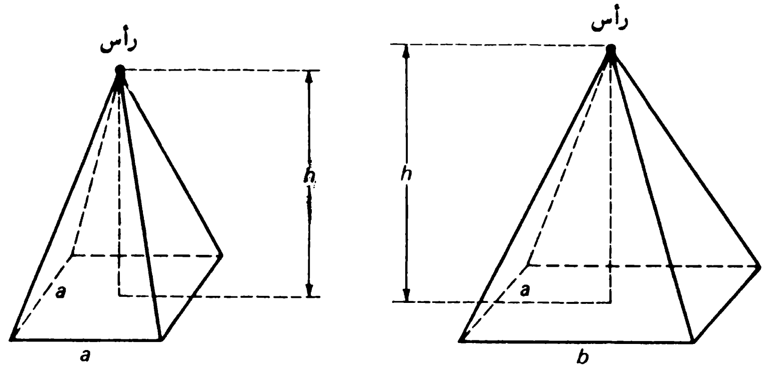
سرژ. r به توان n [$r^n=$]

سرژلانگ. r^n، در اشیاء n بُعدی. درست است؟ ساندرا، مشکلی هست؟

ساندرا. نه. [شاگردان دیگر با اشاره سر می‌فهمانند که مطلب را کاملاً درک کرده‌اند.]

سرژلانگ. بسیار خوب. پس متوجه شدیم که حجم در n بعد چگونه تغییر می‌کند. برگردیم به سه بعدیها، ببینیم چگونه می‌توان حجم چند شکل آشنا را پیدا کنیم. ولی باید بگویم که پاسخ شما در قبال امکان پذیری n بعدی، شایان توجه است. [خنده.] از اینکه می‌بینم شما این مطلب را راحت فهمیدید، کمی تعجب کردم.

بسیار خوب، حالا ببینیم برای تعیین حجم هرم و مخروط چه باید کرد. از هرم شروع کنیم. اول ساده‌ترین نوع هرم را در نظر بگیریم، هرم قائمی که قاعدهٔ مربع داشته باشد. مثل اهرام مصر. هرمها را آنجا می‌بینید؟ [به شکلها اشاره می‌کند.]



نوک هرم را رأس می‌گویند. در هرمی که قاعدهٔ آن مربع است، طول ضلع مربع را a و ارتفاع قائم را h فرض می‌کنیم. فکر می‌کنید حجم هرم چقدر می‌شود؟ دستور حجم هرم چیست؟ در مورد هرم دارای قاعدهٔ مستطیل هم همین سؤال را داریم. کِن می‌توانی بگویی: دربارهٔ حجم هرم چه حدس می‌زنی؟

کِن. نصف abh.

سرژلانگ. این طور حدس می‌زنی؟

کِن. بله.

سرژلانگ. شریل، تو چه نظری داری؟

شریل. من هم.

سرژلانگ. تو می‌گویی $\frac{1}{2}$؟ شما چه فکر می‌کنید؟ [به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.]

چارلی. یک سوم.

سرژلانگ. آه، آدولف می‌گوید. یک سوم [خنده، آدولف نیست...] اوه، متأسفم، اسم شما چی بود؟

چارلی. چارلی.

سرژلانگ. معذرت می‌خواهم، قاطی کردم. چارلی می‌گوید $\frac{1}{3}$. نظر دیگری هست؟

یکی از شاگردان. یک چهارم abh.

سرژلانگ: $\frac{1}{4}abh$ ؟

یکی دیگر از شاگردان. یک پنجم abh ؟ [خنده.]

سرژلانگ. خوب، شما می‌توانید همینطور ادامه بدهید. [چند شاگرد دربارهٔ این مطلب با هم بحث می‌کنند.] بسیار خوب، من به شما می‌گویم. جواب درست $\frac{1}{3}$ است.

حجم هرم دارای قاعدهٔ مستطیل مساوی است با $\frac{1}{3}abh$.

راستی، از کجا فهمیدی؟

چارلی. پیش خودم گفتم که سه بعد داریم، پس باید یک سوم باشد، چون در مثلث که دو بعدی است ضریب یک دوم بود. نگاهش کردم گفتم باید این طوری باشد.

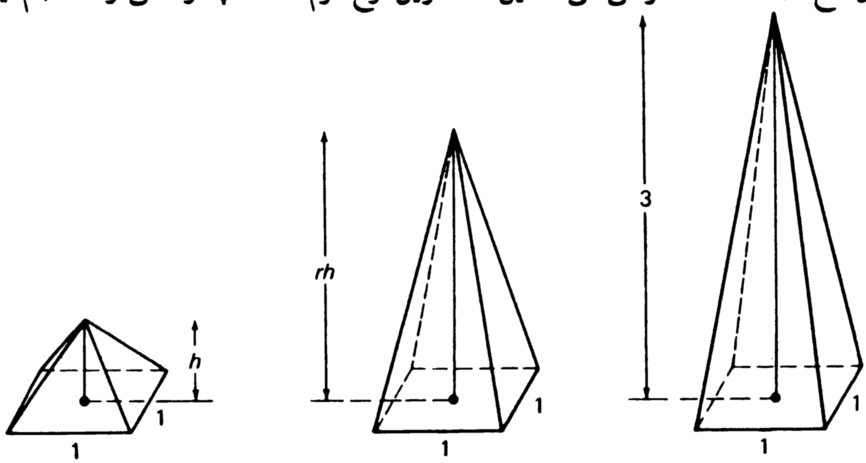
سرژلانگ. احساس بسیار جالبی است. البته جای اثبات را نمی‌گیرد، ولی به هر حال باعث شد که شما آن را حدس بزنید. پس الآن مسئله ما این است که آن را ثابت کنیم. چارلی، تو می‌دانی چطور می‌توان آن را اثبات کرد؟ [سکوت] برای تشکیل هرم چه باید کرد؟ با هر هرمی سه عدد داریم. یک طرف a و طرف دیگر b و ارتفاع h. علاوه بر این شما می‌دانید که حجم به واسطه تجانس در نسبتهای معینی چگونه تغییر می‌کند. ساده‌ترین نوع هرم را در نظر بگیرید. اگر ضلع قاعدهٔ مربع این هرم ۱ باشد به‌نظر شما طول ارتفاع این هرم چقدر باید باشد تا ساده‌ترین مورد آن را بدست آوریم. چارلی نظر تو چیست؟

چارلی. ۳

سرژلانگ. نه. چرا طول ارتفاع باید ۳ باشد؟

چارلی. تا بر ۳ تقسیم کنیم.

سرژلانگ: بسیار خوب، بگذارید امتحان کنیم. چارلی هرمی می‌خواهد بسازد که طول ارتفاع آن ۳ است. فکر می‌کنی که این ساده‌ترین نوع هرم است؟ چگونه می‌توان حجم این



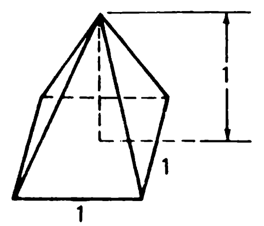
هرم را به طریقی ثابت کرد؟ اگر حجم این یکی را بدانید، حجم آن یکی (هرم تجنیس شده) را هم با استفاده از تجانس می‌توانید به دست آورید.

در هرمی با ارتفاع ۳، تقارن کارسازی وجود ندارد. هنوز به ارتفاع مناسبی پی نبردیم. باید سعی کنید حداکثر تقارن ممکن را به دست آورید.

شریل. آن ارتفاع، ۲ است؟

سرژ یاکن. یک؟

سرژلانگ. ظاهراً یک بهتر است. درست است، از بقیه تقارن بیشتری دارد.



با این وجود، چگونه می‌توان به دستور حجم هرم دست یافت؟ هنوز مشکل ما حل نشده است. پس چند لحظه‌ای به مسئله فکر کنید، فکر می‌کنم بالاخره می‌توانید راه حل آن را پیدا کنید. ولی فقط چهل دقیقه دیگر وقت داریم. باید تردستی کرد. منظورم این است که اختیار از دست من خارج است. اگر می‌توانستم یک بار دیگر سر کلاس شما بیایم، مسئله را تا همین جارها می‌کردم و به شما می‌گفتم که در خانه، پیش از خواب دربارهٔ آن فکر کنید. اگر خودتان مسئله را حل می‌کردید، لذت آن را احساس می‌کردید. حالا، چاره‌ای ندارم جز اینکه جلو این احساس مسرت شما را بگیرم، چه می‌شود کرد، چهل دقیقه بیشتر فرصت ندارم.

پس برهان را می‌گویم. ساده‌ترین حالت را اختیار می‌کنم. [سرژ دست خود را بالا می‌برد.]

بله؟

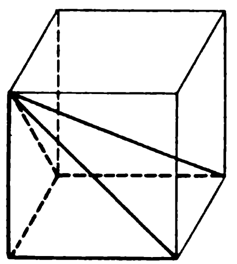
سرژ. فکر می‌کنم، بشود با سه هرم، اگر از طرف زاویه‌های قائمه، آنها را مرتب کنیم، یک مکعب ساخت.

سرژلانگ. آهان، خوب است، حالا شد! می‌خواهی چه کنی؟ سرژ می‌خواهد چه کار کند؟

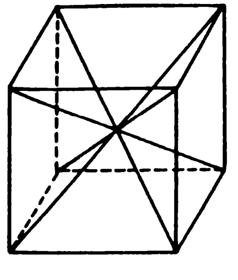
شریل. می‌خواهد با دو هرم، که یک جور باشند، یک مکعب بسازد.

سرژلانگ. فکر خوبی است. ولی فکر می‌کنید می‌تواند چنین کاری بکند؟

سرژ. نه، فکر می‌کنم با سه تا میشود چنین کاری کرد.
سرژلانگ. فکر می‌کنی بشود با سه هرم یک مکعب مستطیل ساخت؟
سرژ. اگر کنجهای هرم را طوری مرتب کنید که مانند مکعب مستطیل زاویه قائمه بسازند. بادوکنج می‌توان یک زاویه قائمه ساخت.
سرژلانگ. آه، شاید. ولی واقعاً می‌توان چنین کاری کرد؟ چگونه؟ اگر یک هرم را در گوشه‌ای این طور قرار بدهم [سرژلانگ شکل زیر را روی تخته می‌کشد.] هرمهای دیگر به ناچار منتظم نخواهند بود منظورم این است که ارتفاعی که از رأس آنها فرود مـی‌آید از وسط قاعده نمی‌گذرد.



به محض اینکه هرم منتظم نشد، با پدیدهٔ جدیدی روبرو می‌شویم که حتماً به آن خواهیم پرداخت چون پدیدهٔ جالبی است و نمی‌توان از آن گذشت ولی هرم غیر منتظم فعلاً دست ما را می‌بندد. [بین سرژلانگ و سرژ برسر چگونگی جا دادن هرمها در مکعب مستطیل بحث تندی در می‌گیرد.]
سرژ. اجازه می‌دهید بیایم پای تخته سیاه؟
سرژلانگ. بله، خواهش می‌کنم.
[سرژ گچ را به دست می‌گیرد و شروع می‌کند به رسم چند حالت ممکن. شاگردان دیگر از ته دل می‌خندند و متلک بار هم می‌کنند. بین سرژ و بقیه شاگردان و سرژلانگ برسر چند حالت ممکن بگو و مگوی داغی رد و بدل می‌شود]
سرژلانگ. بسیار خوب، ببینم سرژ می‌خواست چه کار کند. حالا این شکل را هم ببینیم.



سرژلانگ. فرض کنید مکعب مستطیلی را به این صورت تجزیه کردیم، رأس هرم را در وسط قرار می‌دهیم. در مکعب مستطیل چند هرم جا می‌گیرد؟

یکی از شاگردان. می‌خواهید بدانید چند هرم در جعبه قرار می‌گیرد؟ شش تا.

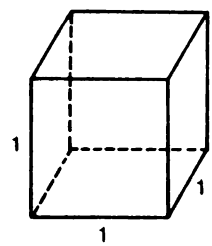
سرژلانگ. بله، شش تاهرم یک جعبه را پر می‌کنند. اسمتان چیست؟

شاگرد. لیسا.

سرژلانگ. لیسا کاملاً درست گفت، خوب فهمید. برای اینکه جعبه‌ای تکمیل بشود باید شش هرم را مرتب کرد. حالا چرا بر عکس عمل نکنیم، با جعبه‌ای که آشنا شدیم، ببینیم ساده‌ترین جعبه کدام است؟

لیسا. یک در یک در یک.

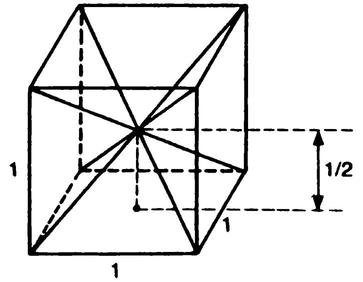
سرژلانگ. کاملاً، خوب، جعبه‌ای در نظر می‌گیریم که یک در یک در یک باشد.



لیسا این راگفت. رأس هرم راکجا بگذارم؟

لیسا. در وسط.

سرژلانگ. دقیقاً اینجا، در وسط، لیسا می‌گوید، شش هرم راکنار یکدیگر قرار می‌دهم. من کاری می‌کنم که او می‌گوید. این طور.



می‌بینید، در این جعبه، که یک مکعب است، شش وجه داریم و به همین دلیل شش هرم، رأس هرمها در وسط جعبه قرار دارد، شش قاعده هرمها، شش وجه مکعب را ساخته‌اند. شش

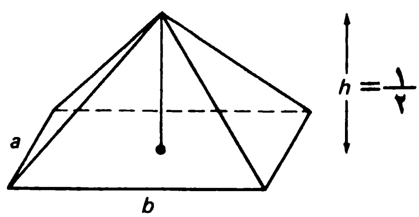
هرم با هم، مکعب را کاملاً پرکرده‌اند. خوب با این حساب، حجم هر هرم چقدر است؟ لیسا تو بگو.

لیسا. یک ششم.

سرژلانگ. $\frac{1}{6}$. حجم کل مکعب را ۱ می‌گیریم، در این صورت حجم هر هرم یک ششم کل حجم است، که می‌شود $\frac{1}{6}$. بنابراین مکعبی داریم که قاعدهٔ آن مربعی است با اضلاع ۱ و ۱. ارتفاع هرم چقدر است؟

یکی از شاگردان. نصف طول مکعب.

سرژلانگ. بله، $\frac{1}{2}$. ارتفاع $\frac{1}{2}$ است. حالا فرض کنید هرمی داریم که اضلاع قاعدهٔ آن a و b باشد ولی ارتفاع آن باز هم $\frac{1}{2}$ باشد.



چگونه می‌توان این هرم را از هرم قبلی به دست آورد؟ مایک.

مایک. با تجنیس یک ضلع در a ضلع دیگر در b و ارتفاع در هیچی.

سرژلانگ. درست است. بنابراین هرمی که اضلاع قاعدهٔ آن a و b و ارتفاع آن $\frac{1}{2}$ باشد از تجنیس دو جهت آن در نسبتهای a و b و جهت سوم در نسبت ۱ حاصل می‌شود. همین طور که مایک گفت. با این اوصاف، حجم این هرم چقدر است؟

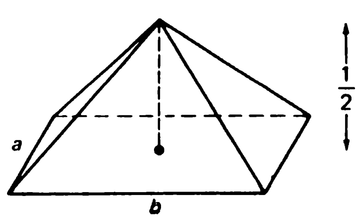
مایک. نصف ab؟

سرژلانگ. نه، هرم قبلی که اضلاع قاعدهٔ آن ۱ و ۱ و ارتفاع آن $\frac{1}{2}$ بود، حجم آن شد $\frac{1}{6}$. اگر یک ضلع قاعده را در a و ضلع دیگر را در b و ارتفاع را در ۱ تجنیس کنیم، حجم، هرمی که به دست می‌آید، چقدر می‌شود؟

مایک. یک ششم ab.

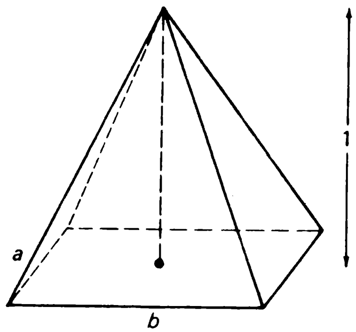
سرژلانگ. بله، $\frac{1}{6}$ ab.

حجم این هرم $\frac{1}{6}$ ab می‌شود.



$$\text{حجم} = \frac{1}{6}ab$$

حالا، تصورش را بکنید، ارتفاع هرم رادست کاری می‌کنم و هرمی می‌سازم که اضلاع قاعدهٔ آن a و b و ارتفاع آن ۱ باشد.



$$\text{حجم} = ۲ \times \frac{1}{۶} ab = \frac{1}{۳} ab$$

تجانسی در سه جهت به عمل می‌آورم، جهت عمودی در چه نسبتی؟

مایک. ۱.

سرژلانگ. نه،ارتفاع قبلی $\frac{1}{۲}$ بود. ولی طول این ارتفاع ۱ است.

نسبت تجانس در این جهت چقدر است؟

مایک. آن را دو برابر کردید.

سرژلانگ. بی‌شک، پس در چه نسبتی تجنیس کردم؟

مایک. ۲.

سرژلانگ. درست است. پس تا حالا، شش هرم داریم. اولی با اضلاع ۱ و ۱ و ارتفاع $\frac{1}{۲}$، دومی با اضلاع a و b و ارتفاع $\frac{1}{۲}$. دو ضلع قاعدهٔ سومین هرم a و b و ارتفاع آن ۱ است. این هرم سومی، از تجانس هرم قبلی در یک جهت با نسبت ۲ به دست آمد. حجم هرم دومی $\frac{1}{۶}ab$ است. سومین هرم چه حجمی دارد؟

مایک. دو یک ششم ab.

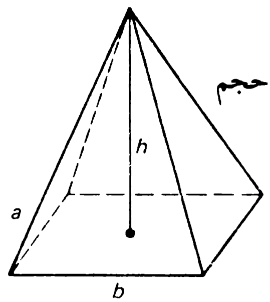
سرژلانگ. بله، $۲ \times \frac{1}{۶} ab$، یعنی چقدر؟

مایک. یک سوم ab.

سرژلانگ. $\frac{1}{۳}ab$. می‌بینید؟ $\frac{1}{۳}$ آمد رو. یک سوم را به چنگ آوردیم. آخرین هرم را هم، که ارتفاع آن مقدار دلخواه h است رسم می‌کنم. هرمی که در قاعده، a و b داشته باشد و ارتفاع آن h باشد، چگونه از هرم قبلی که قاعدهٔ آن a و b و ارتفاع آن ۱ است به دست می‌آید؟ که می‌داند؟

[بیشتر دستها بالا می‌رود] .

مایک. ضرب در h.



$$\text{حجم} = \frac{1}{۳}\,abh$$

سرژلانگ. بله، اگر هرمی راکه اضلاع قاعدهٔ آن a و b و طول ارتفاع آن ۱ باشد از جهت عمودی در نسبت h تجنیس کنیم، هرمی حاصل می‌شود که اضلاع قاعدهٔ آن a و b و ارتفاع آن h است. پس حجم این هرم چقدر است؟

ساندرا. یک سوم abh.

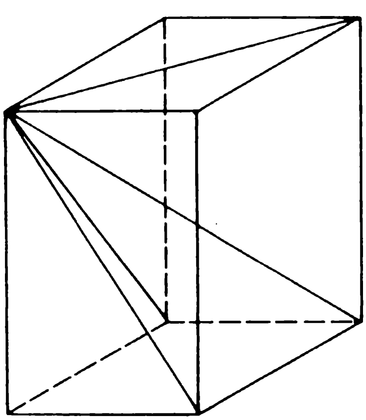
سرژلانگ. بله،بنابراین می‌نویسیم:

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{۳}\,abh$$

ولی این قضیه کلی است.

از این راه، هرمهایی را اختیار می‌کنم که رأس آنها در وسط مکعب جا دارد، شش هرم مکعب راکامل می‌کنند. در این وضعیت، ساده‌ترین هرم، هرمی بود که ضلع قاعدهٔ آن ۱ و ارتفاع آن $\frac{1}{۲}$ بود. به این ترتیب، حجم، حجم هرمهایی که نظیر هرمهای مصر است یعنی ارتفاعی که از رأس آنها فرود می‌آید از وسط قاعده می‌گذرد، راحت به دست آمد.

سرژ. فکر می‌کنم از راه دیگری هم می‌توان آن را بدست آورد. با سه هرم می‌شود یک مکعب ساخت. حجم مکعب abh است.



سرژلانگ. مکعب نیست، مکعب مستطیل است.

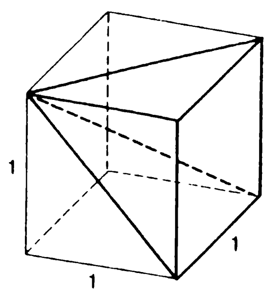
سرژ. خوب، مکعب مستطیل باشد. به هر حال با سه هرم، مکعب مستطیل ساخته می‌شود.

[سرژ شکل را روی تخته سیاه می‌کشد.]

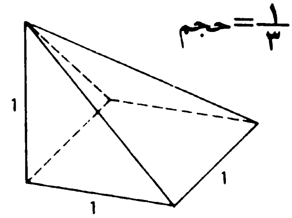
سه هرم را طوری اختیار می‌کنیم که

قاعده‌های آنها، وجوه مقابل یکی از زاویه‌های مکعب مستطیل باشد.

سرژلانگ. نه، ایراد دارد. چون وقتی که a و b و h را یکسان نگیرید، هرمها دیگر مثل هم نیستند. اگر مکعبی در نظر بگیریم که همهٔ اضلاع آن ۱ باشد، می‌شود سه هرم یکسان را در آن جا داد، و نظرت در آن مورد درست است.

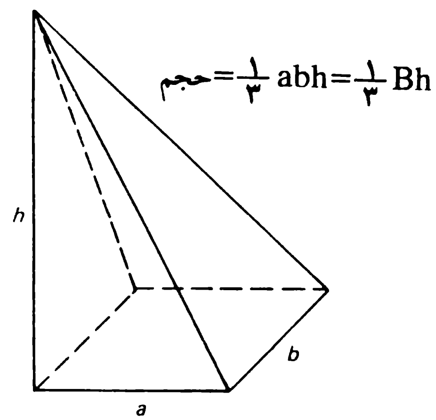


و بنابر تقارنی که وجود دارد، می‌توان نتیجه گرفت که حجم تمام هرمها یکسان است. و اگر مکعب مستطیل داشته باشیم و نه مکعب، دیگر تقارنی در میان نخواهد بود. به همین دلیل به جای مکعب مستطیل، از مکعب استفاده می‌کنیم. تا تقارن بیشتری داشته باشیم. این طور.



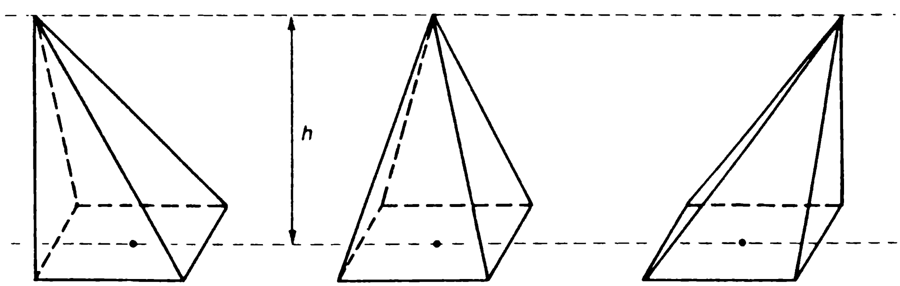
سر هر یک از هرمها ی تو، دقیقاً مقابل مرکز قاعده قرار ندارد. بنابراین هرمی که از آن صحبت می‌کنی، نوع دیگری است. ولی این حرف تو که حجم هرم یک سوم حجم مکعب است، درست است، بنابراین، برای هرمهایی که سر آنها مقابل مرکز قاعده قرار دارند، جواب تو درست است. در این حالت، هرم، یک سوم مکعبی با ضلع ۱ است.

بعد، یک طرف قاعده را در a و طرف دیگر را در b و جهت قائم را در h تجنیس می‌کنیم و به این ترتیب دستور حجم هرمی که از آن صحبت می‌کنی، یعنی هرمی که رأس آن دقیقاً رو بروی مرکز قاعده است، به دست می‌آید:



ولی هنوز مسئله هرم غیر منتظم، یعنی هرمی که رأس آن مقابل وسط قاعده قرار ندارد، لاینحل باقی مانده است.

خوب ببینیم سرژ می‌خواست چه کار کند. هرم غیر منتظمی داریم که قاعدهٔ آن مستطیل است این طور:



ارتفاع هرم غیر منتظم چیست؟ چارلی.

چارلی. فاصله بین سر هرم تا قاعده؟

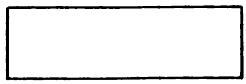
سرژلانگ. درست است. خوب، حجم هرم غیر منتظم چقدر است؟

چارلی. یک سوم abh.

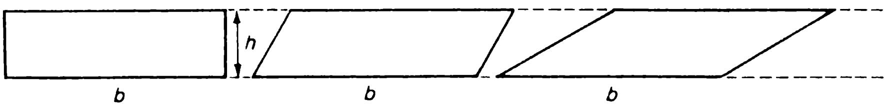
سرژلانگ. بله، حدس درستی است، چارلی درست حدس زد. ولی هنوز ما آن را ثابت نکرده‌ایم. باید در مورد مورب بودن اطلاعاتی کسب کنیم، پس این حالت را، که سرژ از آن استفاده کرد، باید بررسی کرد. به این وضعیت برش نیز گفته می‌شود. به شکلهای دو بعدی برگردیم. مستطیلی را اختیار می‌کنیم.

شاگرد. چرا مربع نباشد؟

سرژلانگ. فرقی نمی‌کند. می‌توانید مستطیلی رادر نظر بگیرید که یک دسته کارت بازی به وجود می‌آورد.



من آن را کج می‌کنم.



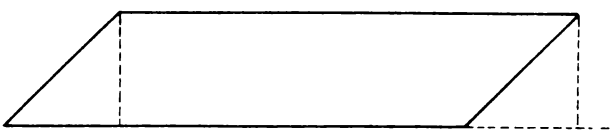
با این عمل متوازی الاضلاعی به وجود می‌آید، ولی ارتفاع تغییر نمی‌کند. بنابراین اگر مساحت مستطیل A باشد، مساحت متوازی الاضلاع چقدر است؟

ساندرا. A.

سرژلانگ. باز هم A. مساحت تغییری نمی‌کند. مساحت متوازی الاضلاع رامی‌دانید چگونه به دست می‌آید؟ سال گذشته آن را خواندید؟

چارلی. بله.

سرژلانگ. آن را چگونه ثابت کردید؟ [شاگردان اثباتی راکه به کمک مثلث توجیه می‌شود، با هم می‌گویند.] درست است. شما از این شکل استفاده می‌کنید.

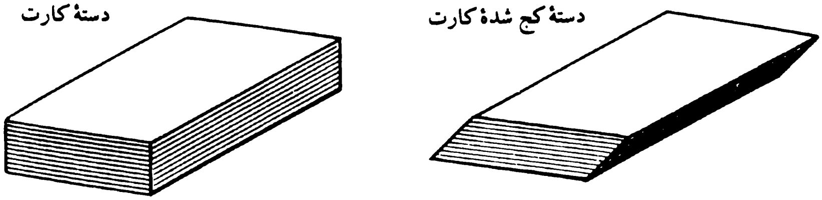


با این دو مثلث. پس فرض می‌کنیم شما می‌دانید که مساحت متوازی الاضلاع مساوی است با قاعده ضرب در ارتفاع. پس این قضیه را داریم:

انحراف یا برش تغییری در مساحت ایجاد نمی‌کند.

حالا برویم سر سه بعدیها، مستطیلی راکه در یک طرف دستهٔ کارت به وجود می‌آید

درنظر بگیرید. بعد آن راکج کنید.

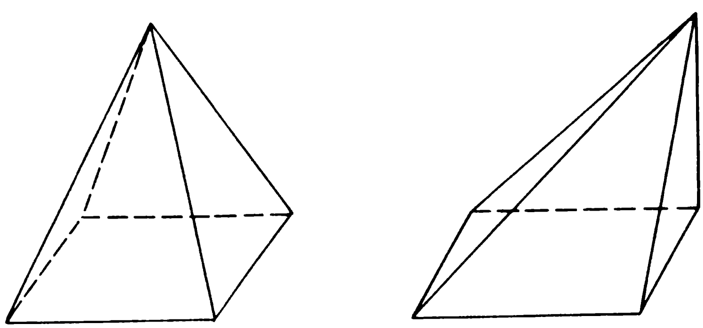


در این شکل، دسته کارت را می‌بینید که صاف روی هم قرار گرفته‌اند، و در آن شکل، دستهٔ بُرش خورده را می‌بینید. سطح دسته هم به همان نحو حرکت کرده است. بنابراین حجم دستهٔ کارت بر اثر برش تغییری نمی‌کند. قبلاً ثابت کردیم که اگر مستطیلی را در یک جهت برش دهیم، مساحت آن همچنان ثابت می‌ماند. پس همان قضیه دربارهٔ سه بعدیها هم صادق است:

حجم اشیاء سه بعدی بر اثر برش ثابت می‌ماند.

این کار رادر مکعب مستطیل با برش دادن یک بعدِ آن کردیم.

باهرم هم می‌توان این کار را کرد. فرقی نمی‌کند که قاعدهٔ هرم مربع باشد یا مستطیل. هرمی که داریم، منتظم است. هرم را این‌طور برش می‌دهم با این کار، ارتفاع، ارتفاع قائم، تغییر نمی‌کند.



بنابراین اگر هرم را برش دهیم، حجم آن تغییر نمی‌کند. این حالت در مورد همهٔ اجسام سه‌بعدی صادق است. چگونه می‌توان آن را ثابت کرد؟ یک جسم سه بعدی نامعینی را در نظر بگیرید. من حکم می‌کنم که حجم این جسم براثر برش تغییر نمی‌کند. این حکم را

چگونه باید ثابت کرد؟

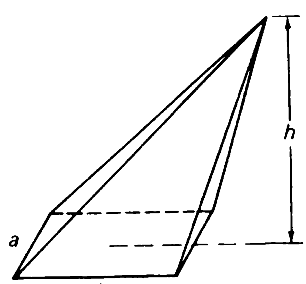
شریل. با شکلهای منتظم اندازهٔ تقریبی آن را به دست می‌آوریم. مثلاً بااستفاده از مکعب.

سرژلانگ. درست است. کاملاً همین طور است. شما خیلی زود متوجه می‌شوید. داخل شکل سه بعدی، شبکه‌ای می‌سازم، شبکه‌ای از مکعب مستطیلهای سه بعدی. پس برشی اِعمال می‌کنم. در این صورت هر مکعب مستطیل به چه چیزی تبدیل می‌شود؟ به متوازی‌الاضلاع سه بعدی تبدیل می‌شود. این متوازی الاضلاع را متوازی السطوح هم می‌نامند. معنی این کلمه رامی‌دانید؟ اگر مکعب مستطیلی را برش دهم. متوازی السطوح حاصل می‌شود. بنابراین حجم مکعب مستطیل براثر برش تغییر نمی‌کند و در نتیجه حجم هر جسم فضایی دلخواهی براثر برش ثابت می‌ماند. و برهان همان است که شریل گفت یعنی تعیین اندازهٔ تقریبی مکعب مستطیل. قضیه در مورد مکعب مستطیل‌ها صادق است و چون حجم براثر برش تغییر نمی‌کند بنابراین در تقریب شکلهای فضایی هم صحت دارد.

پس قضیهٔ جدید این است که: **حجم براثر برش تغییر نمی‌کند.**

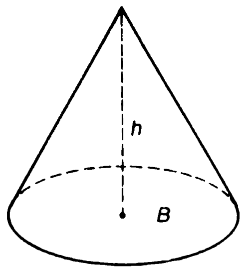
پس کاری که سرژ در اول بحث کرد، در مورد هرمهای غیرمنتظم هم صادق است. ثابت کردیم که حجم هرمهای غیرمنتظم مانند حجم هرمهای منتظم، یک سوم قاعده در ارتفاع است. اگر هرمی داشته باشیم که قاعدهٔ آن مربع و یا مستطیل باشد، و مساحت قاعده را B فرض کنیم آنگاه:

$$\text{مساحت هرم غیر منتظم}=\frac{1}{۳}\,abh=\frac{1}{۳}\,Bh$$



شریل. هرمی که قاعدهٔ آن مثلث است چطور؟

سرژلانگ. بسیار خوب! ولی چرا فقط مثلث؟ چرا از هرمی صحبت نکنیم که قاعدهٔ منحنی داشته باشد؟ اصلاً هر نوع هرم. ما فقط به دنبال هرم نیستیم. به این مخروط که قاعدهٔ آن دایره است، توجه کنید:



قاعده آن B و ارتفاع آن h است. حجم مخروط چقدر است؟ چه کسی می‌تواند حدس بزند؟ [اغلب دستها بالا می‌رود.]

شریل. حجم مساوی است با $\pi r^۲$ ضرب در ارتفاع ضرب در [مکث] یک سوم؟

سرژلانگ. بله! کاملاً درست گفتی، دقیقاً همین است.

حجم مخروط مساوی است با $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$.

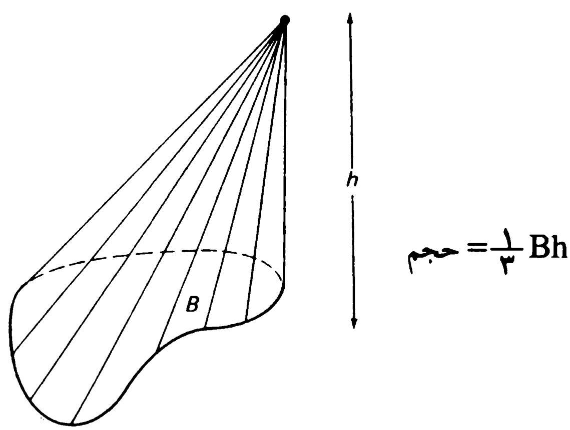
[به دانش آموز دیگری] شما چه می‌خواستید بگویید؟

شاگرد. همین را می‌خواستم بگویم.

سرژلانگ. و مایک در ته کلاس؟

مایک. همان.

سرژلانگ. درست است قضیه همین بود. فرض کنید قاعدهٔ نامشخصی داشته باشیم، کلیه مانند، مخروطی می‌سازیم، این طور:



می‌توانم، قاعدهٔ کج و معوجی را، هر طور که دلتان می‌خواهد، اختیار کنم. قاعدهٔ دلخواهی دارم. می‌تواند مربع باشد، می‌تواند منحنی باشد یا هرچی. بعد می‌شود روی آن مخروطی ساخت. یک نقطه‌ای در فضا انتخاب می‌کنم نقطه را به تمام نقاط قاعده وصل می‌کنم. بااین کار مخروطی روی قاعدهٔ دلخواه ساخته می‌شود. مساحت قاعده را B فرض کنید. ارتفاع را هم h بگیرید. حجم این مخروط چقدر است.؟

شریل. یک سوم Bh.

سرژلانگ. درست است، قضیه از این قرار است:

حجم هر مخروطی که قاعدهٔ آن B و ارتفاعش h باشد مساویِ $\frac{1}{3}Bh$ است.

چگونه می‌توان این قضیه را ثابت کرد؟

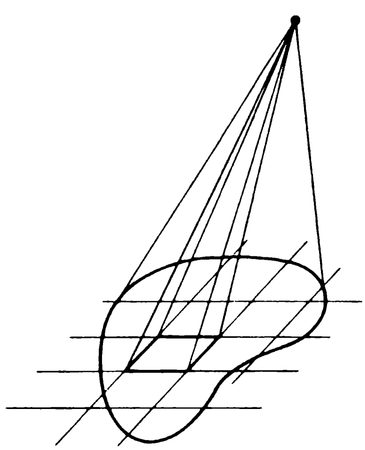
سرژ. با شروع از ساده‌ترین حالت؟

سرژلانگ. ساده‌ترین حالت متعلق به هرم با قاعدهٔ مربع یا مستطیل و با ارتفاعی مفروض بود. حالا فرض کنید که قاعده‌ای دارید منحنی و دلخواه. چگونه می‌توان با این قاعدهٔ منحنی و دلخواه کنار آمد؟

چارهٔ کار چیست؟

سرژ. آه فهمیدم. باید شبکه‌ای از شکلهای دیگر در آن جا داد.

سرژلانگ. قاعده را با شبکه‌ای پر می‌کنم، درست است. پس خطوط را می‌کشم.



راچل. اندازه تقریبی حجم را با به دست آوردن مساحت تقریبی قاعده، تعیین می‌کنیم. بعد با هرمها حجم تقریبی مخروط را مشخص می‌کنیم. هرمها راکنار هم می‌گذاریم تا حجم

به دست آید.

سرژلانگ. درست است. فکر می‌کنم که شریل هم می‌خواست همین را بگوید. [شریل با حرکت سر تصدیق می‌کند.] فکر می‌کنم مایکل در آن پشت وپسله‌ها هم؟ [خنده]. می‌بینید، باهر مستطیلی می‌توانید هرمی بسازید که مستطیل قاعده‌اش باشد و رأس همهٔ هرمها، رأس مخروط است. برای این کار رأس مخروط را باید به نقاط شبکه وصل کنید. پس، با رأس مخروط، همهٔ هرمهای غیر منتظم را تشکیل می‌دهید و می‌دانید که حجم هرم مساوی است با یک سوم قاعده ضرب در ارتفاع. بنابراین اگر مجموع آنها را بگیرید، بااستفاده از قضیهٔ هرمها، به قضیهٔ تعیین حجم مخروط باقاعدهٔ دلخواه دست می‌یابید. پس فهمیدیم که $\frac{1}{3}Bh$ چطور به دست آمد.

حالا اگر قاعده، دایره‌ای باشد با شعاع r، در این صورت مساحت آن πr^2 می‌شود و به این دلیل برای پیدا کردن حجم مخروط معمولی از فرمول $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ استفاده می‌کنیم این فرمول فقط یک حالت خاص از قضیهٔ کلی متعلق به قاعدهٔ دلخواه است.

ملاحظات

حسن تلقی شاگردان باسن کمی که دارند از m بُعد برای من تجربهٔ عادی شده است. تاریخی که از «ابعاد» ارائه شده و هیاهویی که بر سر «بعد چهارم» آینشتاین، به‌عنوان زمان، ایجاد شده است، شاید بتواند بعضی افراد را شگفت زده کند. ولی تجربه به من ثابت کرده است که نوجوانان مسائل متعلق به ابعاد عالی را فقط هنگامی درک می‌کنند که بزرگترها وجود این مسائل را مطرح کنند.

این سؤال: «آیا زمان بعد چهارم است؟» پرسش بجایی نیست. برای اینکه منظور شخص را از «بعد» بدون هیچ توجیهی، از قبل تعیین می‌کند. علاوه براین، سؤال این مفهوم را القا می‌کند که اگر بعد چهارمی وجود داشته باشد، این بعد یکی بیش نیست. ولی امروزه، به طور کلی پذیرفته‌اند که هر مفهومی راکه بتوان با عدد متناظر کرد، دارای بُعد است. این اندیشه، به ذهن دالامبر نیز، موقعی که برای دایرةالمعارف دیدرو، مقاله‌ای راجع به «بُعد» نوشت، خطور کرده بود. در آن مقاله آمده است:

این نحوهٔ در نظر گرفتن کمیت‌ها در بیش از سه بعد، به اندازهٔ نحوهٔ دیگر دقیق است. چون حروف جبری را همواره می‌توان به عنوان نماد اعداد، گویا و یا گنگ نمایش داد. قبلاً گفتم

که تصور بیش از سه بعد، ناممکن است. یکی از آشنایان من، که نجیب زادهٔ هوشمندی است معتقد است که، با همهٔ این اوصاف، زمان را می‌توان بعد چهارم تلقی کرد، و اینکه حاصل ضرب زمان در [ابعاد جسم] جامد را، ممکن است به نحوی حاصل ضرب چهار بعد به شمار آورد. این طرز تفکر، شاید عوض شود، ولی به گمان من، مزیتی دارد که بی‌شک بکر است.

طبیعتاً، یکی از دوستانش می‌تواند خود او باشد، اما او آدم مآل اندیشی بود و دربارهٔ آنچه را که ممکن است فکر ناصوابی پنداشته شود، با ملاحظه عمل می‌کرد. این فکر، امروزه جا افتاده است. در فیزیک علاوه بر سه بعد فضا و زمان از ابعاد دیگری نیز یاد می‌شود. مثلاً سرعت، شتاب، انحنای [فضا] و غیره. در اقتصاد، عددی را می‌توان شرکت داد، مثلاً مجموع سود ناخالص یک شرکت در سال معینی، به این ترتیب، بعدی اختیار می‌کنیم مثلاً برای صنایع فولاد؛ صنعت نفت، شیلات، کشاورزی، صنعت اتومبیل سازی والی آخر.

وقتی که با شاگردان از ابعاد عالی صحبت کردم، آنها مطلقاً مقاومت نکردند. شاگردان متوجه شدند که در زمینه چند بعدی، چگونگی عمل با اعداد مهم است. به همین دلیل، راجع به این نوع تجرید، تصور درستی داشتند، و صحیح پاسخ می‌دادند. گاهی، در چنین شرایطی، من این سؤال را مطرح می‌کنم که آیا بعد چهارم وجود دارد، به این سؤال به صورتی که گفته شد. پاسخ می‌دهم، و به این نکته اشاره می‌کنم که جواب این سؤال به منظوری که ما از کلمه «بُعد» داریم بستگی دارد. اگر «بعد» را به معنای ابعاد فضایی اطراف خود بگیریم، در این صورت بیش از سه بعد نداریم. ولی اگر برای این کلمه معنایی وسیع تر قائل شویم، در این صورت، ابعاد دلخواهی اختیار خواهیم کرد و به سهولت آنها را به کار می‌گیریم. این پاسخ طبیعی که تجنیس n بُعد در نسبت r، حجم را در r^n تغییر می‌دهد، هم فوری و هم درست است. البته، وقتی که می‌پرسم دراثر تجانس چهار بعد، حجم چه تغییری می‌کند، سرژ پاسخ می‌دهد: «rst هر چی.» او با این عبارت نشان می‌دهد که مطلب را فهمیده است. تنها چیزی که می‌ماند خاطرنشان کردن این نکته است که «هر چی» ناظر بر انتخاب حروف است. اگر به استفاده از حروف ادامه دهیم، پس از پایان حروف الفبا، کار ناتمام می‌ماند. به همین دلیل، اعداد متناظر با سه بعد را بهتر است با نمادی شبیه X_1 و X_2 و X_3 نشان داد. در این صورت، برای نشان دادن اعداد متناظر با n بُعد از X_1 و X_2 و X_3 ... و X_n بدون هیچ مشکلی استفاده می‌کنیم. و اگر تجنیسی در نسبتهای r_1 و r_2 و r_3 و ... n به عمل آوریم، حجم در نسبت (حاصل ضرب) $r_1 r_2 r_3 ... r_n$ تغییر می‌کند هر مشکل (بسیار ناچیزی) که در اینجا پدید آید، از انتخاب حروف و اندیسها، و به عبارت دیگر از گزینش

علاماتی جهت تسلسل نمادهایی که ذهن با آنها مأنوس است،منشأ می‌گیرد.

دربارهٔ تعریف بیضی، از شاگردان دربارهٔ اینکه آنها از مختصات چیزی خوانده‌اند یا نه، استفسار کردم که جواب منفی دادند. اگر سطح کلاس کمی بالاتر از این بود، مطلب را اندکی بسط می‌دادم: برحسب سنت جاری، بیضی و سهمی و دیگر منحنی‌های مألوف، با استفاده از خواصی تعریف می‌شوند که من آنها را پیچیده می‌دانم. به عنوان مثال: بیضی، مکان هندسی نقاطی است که مجموع فواصل هر نقطهٔ آن از دو نقطهٔ مفروض، مقدار ثابتی است. این رهیافت سنتی را اصلاً نمی‌پسندم، چون اولاً معادلهٔ رسمی

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱،$$

از درک این نکته باز می‌دارد که بیضی، از تجنیس دایره حاصل می‌شود و ثانیاً فهمیدن این مطلب راکه مساحت بیضی، مساوی πab است، دشوار می‌کند. این مقدار مستقیماً از تعریف بواسطهٔ مفهوم تجانس و تکنیک تقریب به وسیلهٔ مستطیلها به دست می‌آید.

حجم توپ

این درس در دو جلسه، قبل و بعد از نهار برگزار گردید. مخاطبان، شاگردان ۱۴ سالهٔ کلاس نهم مدرسه‌ای در پاریس بودند. آنها به عنوان مثال، هنوز قضیهٔ فیثاغورس را نخوانده بودند

سرژلانگ. امسال، چه می‌خوانید، هندسه؟ جبر؟

کلاس. جبر.

سرژلانگ. و هندسه چی؟

کلاس. یک کمی.

سرژلانگ. پس کمی هندسه بلدید، نه؟

کلاس. تازه شروع کردیم.

سرژلانگ. [به شاگردی اشاره می‌کند.] تو می‌دانی π چیست؟

شاگرد. بله.

سرژلانگ. خوب، چیست؟

شاگرد. یک عدد ... هندسی.

سرژلانگ. هان؟ چه عددی؟

شاگرد. ۳/۱۴ والی آخر.

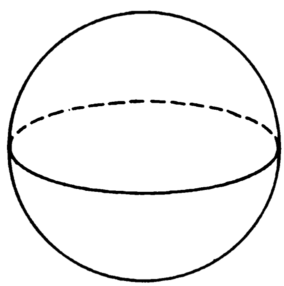
سرژلانگ. ۳/۱۴ والی آخر. π نشان دهندهٔ چه چیزی است؟

شاگرد. ؟؟؟

سرژلانگ. خوب، کی می‌داند؟ شما اسمتان چیست؟

شاگرد. کریستوفر.

سرژلانگ. بسیار خوب، کریستوفر.
ناتالی. محیط دایره است.
سرژلانگ. پس محیط دایره چیست؟
ناتالی. منظورتان چیست؟
سرژلانگ. منظورم، تابعِ π.
ناتالی. ؟؟؟
سرژلانگ.خوب،دایره‌ای به شعاع r داریم...
یکی از شاگردان آها! $2\pi r$.
سرژلانگ.خیلی خوب. $2\pi r$، که r شعاع دایره است. و مساحت چقدر است؟
شاگرد. πr^2.
سرژلانگ.درست است. پس دو فرمول داریم و همین طور که کریستوفر گفت، π مساوی ۳/۱۴... خوب، قصدم این نبود که مساحت و محیط دایره را به دست بیاورم، می‌خواهم همین کار را با یک بعد بالاتر انجام دهم. اگر یک بعد بالاتر داشته باشیم... می‌دانید که، قبلاً از محیط و مساحت صحبت می‌کردیم، ولی اگر یک بعد بیشتر در نظر بگیریم، چه چیزی به دست می‌آید؟
شاگرد. یک توپ.
سرژلانگ.درست، یک توپ، من آن را می‌کشم.



و چه چیز توپ را می‌خواهیم پیدا کنیم؟
شاگرد، حجم آن را.
سرژلانگ. درست است، حجم، اسمتان چیست؟
شاگرد.آن.
سرژلانگ. حجم توپی به شعاع r چقدر است؟

آن. ؟؟؟

سرژلانگ. کی فرمول را می‌داند؟

کلاس. ؟؟!

سرژلانگ. بسیار خوب. محیط دایره πr ۲ و مساحت آن $\pi r^۲$ ولی برای توپ، چه می‌شود؟

یکی از شاگردان. مربع π ضرب در r به توان ۴.

سرژلانگ. نه، اول ببینیم حجم جعبه‌ها چگونه به دست می‌آید، اگر مربعی به ضلع r داشته باشیم، مساحت این مربع می‌شود چقدر؟

کلاس. مجذور r.

سرژلانگ. حالا، فرض کنید مکعبی داریم. حجم مکعب چقدر است؟

کلاس. مکعبِ r.

سرژلانگ. راجع به تجانس چیزی می‌دانید؟

کلاس. یک کمی.

سرژلانگ. خوب شد، فرض کنید مکعبی به ضلع a داریم. حجم آن می‌شود $a^۳$. اگر این مکعب را از همهٔ اطراف در نسبت r تجنیس کنیم، حجم چقدر می‌شود؟ آن، تو می‌دانی؟

آن. مکعبِ ra.

سرژلانگ. درست است، $(ra)^۳$ به‌عبارت دیگر $r^۳a^۳$. همه فهمیدند؟ پس، می‌توانیم بگوییم که، باتجانس در نسبت r، حجم چگونه تغییر می‌کند؟ در نسبت $r^۳$ ایرادی نیست؟ خوب است. حالا برویم سرِ کره. حجم آن چقدر می‌شود؟

سوفی. $\pi r^۳$.

سرژلانگ. $\pi r^۳$ـ جواب بدی نیست و نظر تو چیست؟

آن. مکعب π در مکعب r.

سرژلانگ. آه! کاملاً معلوم نیست، اینطور است؟ ولی به سبب تجانس،باید ضریبِ $r^۳$ باشد. پس، در جواب، $\pi r^۳$ را داریم ولی این $\pi r^۳$ تنها نیست یک عدد ثابت هم جلوش هست. این عدد $\frac{۴}{۳}$ است. حجم توپ این است:

$$\boxed{V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳}$$

حجم شکلهای دیگر هندسی را می‌دانید؟ یا فقط مساحتها را بلدید؟ این اولین بار است

که با حجم روبرو می‌شوید؟

کلاس. نه، حجم مکعب را خوانده‌ایم.

سرژلانگ. بسیار خوب. پس کار امروز ما این است که فرمول حجم توپ را یعنی $\frac{4}{3}\pi r^3$ را ثابت کنیم. چه باید کرد؟ کسی نمی‌داند؟ اول حجم توپی به شعاع ۱ را پیدا می‌کنیم. این، کار را ساده‌تر می‌کند. حجم توپی به شعاع ۱ چقدر است؟ آن.

آن. ؟؟؟

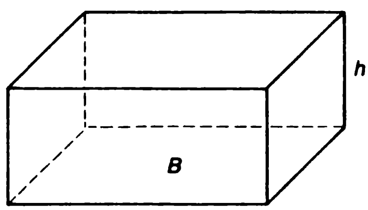
سرژلانگ. اگر در فرمول به جای r، ۱، قرار دهم، چه چیز به دست می‌آید؟

آن. $\frac{4}{3}\pi$.

سرژلانگ. درست است، $\frac{4}{3}\pi$. می‌خواهیم ثابت کنیم که حجم توپی به شعاع ۱، مساوی $\frac{4}{3}\pi$ است. چگونه؟

کلاس. ؟؟؟

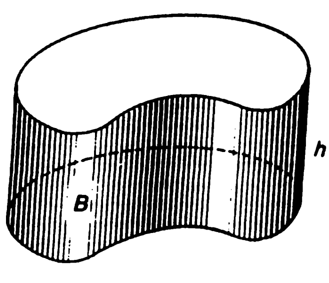
سرژلانگ. خوب، باید از معلوماتی که داریم استفاده کنیم. فعلاً از استوانه یا جعبه.



حجم مکعب مستطیل که قاعدهٔ آن B و ارتفاعش h است چقدر است؟

سوفی. قاعده ضرب در ارتفاع.

سرژلانگ. درست است، B ضرب در h. در اینجا، قاعده‌ای که انتخاب کردیم، مستطیل بود. حالا اگر قاعده منحنی بود چه می‌شد؟ هر قاعده‌ای، مثلاً این یکی:



کلاس. این هم همین‌طور.

سرژلانگ. بله، این هم همینطور، حجم همیشه قاعده ضرب در ارتفاع است، و اگر یک استوانهٔ واقعی داشته باشیم، که قاعدهٔ آن قرصی به شعاع ۱ و ارتفاع آن h باشد چطور؟ شما [به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.]

ویرونیک.؟؟؟

سرژلانگ. مساحت قاعده چقدر است؟

ویرونیک. ؟؟؟

سرژلانگ. قرص، قاعده قرص است، مساوی با چقدر است؟

ریوکا. πr^2

سرژلانگ. و حجم استوانه مساوی؟

ریوکا: $\pi r^2 h$

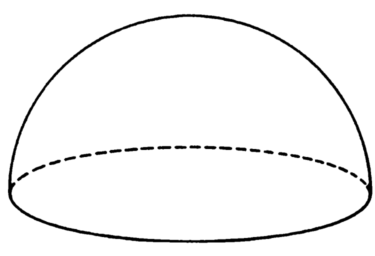
سرژلانگ. درست است.

$$\text{حجم استوانه‌ای به شعاع } r \text{ و ارتفاع } h = \pi r^2 h$$

ایرادی نیست؟ اگر مساحت قرص را πr^2 بدانیم در این صورت حجم می‌شود $\pi r^2 h$. همه موافقند؟ عالی است؟ حالا می‌رویم سرِ توپ. چه کار کنیم؟ مجبوریم توپ را به قطعاتی پاره پاره کنیم پاره‌هایی که از آنها اطلاع داریم. فعلاً استوانه‌ها رامی‌شناسیم.

سوفی. توپ رادونیم کنید.

سرژلانگ. اگر توپ را دونیم کنیم. چیزی شبیه این به دست می‌آوریم:

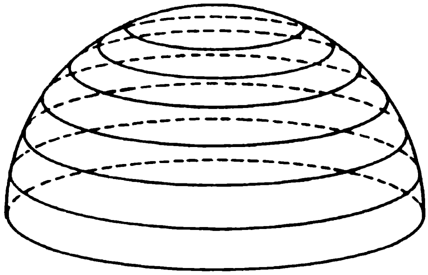


سوفی. می‌توانیم آن را قاچ قاچ کنیم: قاعده به شکل قرص در خواهد آمد.

سرژلانگ. قاعده به شکل قرص در می‌آید، ر مساحت قرص را بلدیم، πr^2. درست است. ولی یک چیزی در آن بالا می‌ماند، که کاملاً استوانه نیست. پس چه باید کرد؟

آن. آن را هم به صورت استوانه، قاچ قاچ می‌کنیم.

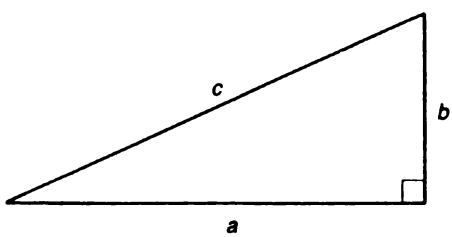
سرژلانگ. شما واقعاً زرنگید. [خنده.] درست است، آن را قاچ قاچ می‌کنیم این طور.



عالی است. قضیهٔ فیثاغورس را خوانده‌اید؟

کلاس. نه

سرژلانگ. مثلث قائم الزاویه‌ای داریم، مثل این:



یک ضلع a و ضلع دیگر b و ضلع سومی، وتر، c است. نمی‌دانید بین a b و c چه رابطه‌ای هست؟ اصلاً چیزی در این باره نشنیده‌اید؟ این رابطه وجود دارد:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

تا حالا این رابطه را ندیده‌اید؟

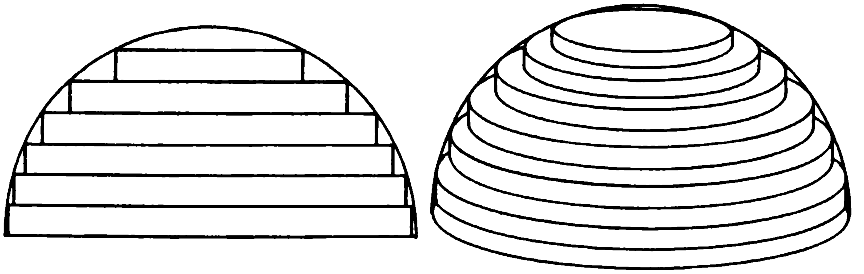
معلم. سال دیگر.

یکی از شاگردان (وانیا). چرا مجذورها؟

سرژلانگ. خیلی معلوم نیست که چرا باید مجذور باشد، این را باید ثابت کرد. ولی امروز نمی‌خواهم این کار را بکنم. به این دلیل از شما می‌خواهم که آن را بدون اثبات قبول کنید. قبول می‌کنید؟

کلاس. بله، باشد.

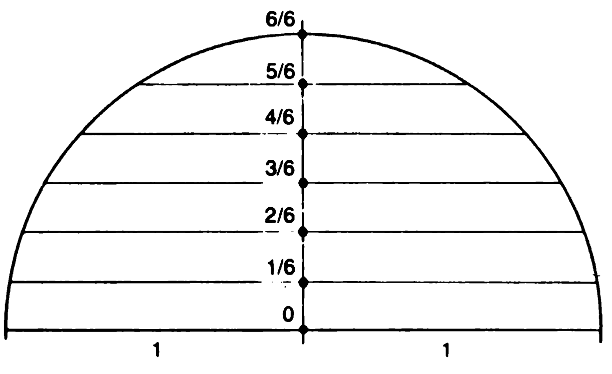
سرژلانگ. خوب، حالا توپ را برش می‌دهم و آن را به صورت قاچهای استوانه‌ای در می‌آورم، این طور:



در واقع، نصف توپ را برش می‌دهم. همه بچه‌ها قاچها را می‌بینند؟ اگر به آنها از پهلو نگاه کنیم، شبیه مستطیل دیده می‌شوند ولی اگر آنها را حول محور عمودی دوران دهم، در این صورت استوانه خواهم داشت و اگر شعاع و ارتفاع این استوانه‌ها را داشته باشم، حجم آنها را هم می‌توانم به‌دست بیاورم، حجم استوانه چیست؟

شاگردان. $\pi r^2 h$.

سرژلانگ. خوب، حالا باید شعاع و ارتفاعها را بدانم. بسیار خوب،ارتفاع به تعداد استوانه‌ها بستگی دارد. می‌توانم ۵ یا ۶ و یا استوانه‌های بیشتری اختیار کنم. بگذارید شکل متعلق به شش استوانه را رسم کنم.



اگر مبدأ را ۰ فرض کنیم، اولین نقطه در چه ارتفاعی خواهد بود؟

کلاس. $\frac{1}{6}$.

سرژلانگ. و نقطهٔ بعدی؟

کلاس. [همه با هم] $\frac{۲}{۶}$.

سرژلانگ. وبعد؟

کلاس. $\frac{۳}{۶}$.

سرژلانگ. درست است. و ارتفاع نقاط بعدی $\frac{۴}{۶}$ و $\frac{۵}{۶}$ و $\frac{۶}{۶}$ است.

کلاس. بله

سرژلانگ. و اگر توپ را به هفت قاچ تقسیم کرده باشم، ارتفاع اولین نقطه چقدر می‌شود؟

کلاس. $\frac{۱}{۷}$.

سرژلانگ. و نقاط بعدی؟

کلاس. $\frac{۲}{۷}$ و $\frac{۳}{۷}$ تا $\frac{۷}{۷}$.

سرژلانگ. بله. و اگر به این کار جنبهٔ عمومی بدهم؟ چه باید بگویم؟

ناتالی. $\frac{1}{n}$.

سرژلانگ. $\frac{1}{n}$؟ فهمیدید! به طور کلی، $\frac{1}{n}$ را اختیار می‌کنم، ارتفاع اولین نقطه چقدر است؟

کلاس. $\frac{1}{n}$.

سرژلانگ. و نقطهٔ بعدی؟

کلاس: $\frac{2}{n}$

سرژلانگ: و نقطهٔ بعدی؟

کلاس. $\frac{3}{n}$.

سرژلانگ: و آخرین نقطه، بعد از پیمودن همهٔ فاصله؟

کلاس. $\frac{n}{n}$

سرژلانگ. درست است، تعمیم این طوری است. و حجم هر استوانه چقدر می‌شود؟ ارتفاع مساوی است با؟

یکی از شاگردان. h است.

سرژلانگ. درست، h است، ولی h مساوی است با چقدر؟

کلاس. ...

سرژلانگ. وقتی توپ را به شش قاچ تقسیم کنیم، h چقدر است؟

وانیا. بستگی به این دارد که آن را چگونه قاچ کنی.

سرژلانگ. بله، ولی همه استوانه‌ها ارتفاع یکسانی دارند. این را فهمیدی؟

وانیا. بله.

سرژلانگ. اگر شش قاچ داشته باشیم، ارتفاع چقدر است؟

وانیا. $\frac{۱}{۶}$

سرژلانگ: بله، وقتی که ۶ قاچ داشته باشیم، ارتفاع مساوی $\frac{1}{6}$ است، ارتفاع دومی هم $\frac{1}{6}$ است و بقیه هم همینطور است. اشکالی نیست؟

کلاس. نه اشکالی نیست.

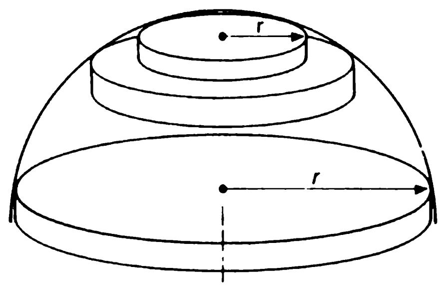
سرژلانگ. بسیار خوب، پس در مورد شش قاچ، همهٔ ارتفاعها مساوی $\frac{1}{6}$ است. و در حالت n قاچ، هریک از آنها برابراست با؟

کلاس. [باهم.] ۱ روی n.

سرژلانگ. آفرین، $\frac{1}{n}$. و حالا شعاع، شعاع چقدر است؟ شعاع اولین قاچ؟

کلاس. r.

سرژلانگ. بله، r است، ولی r مساوی است با؟ خوب ،شکل متعلق به شش قاچ را رسم می‌کنیم. این اولین r، و این هم دومی و همین‌طور تا آخرین نقطه.



شعاعهاتغییر می‌کنند، این‌طورنیست؟ پس اولین شعاع مساوی است بـا؟ شعـاعِ دایـرهٔ بزرگ، شعاع توپ، که آن را ۱ اختیار کردیم، فراموش که نکردید؟ می‌خواهیم حجم توپی به شعاع ۱ را به دست بیاوریم.

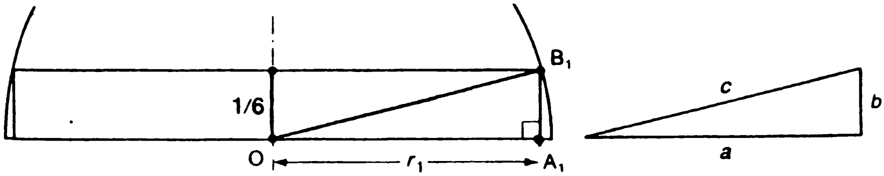
و شعاع اولین استوانه، OA_1 است. مساوی است با چقدر؟

کلاس. ؟؟؟

سرژلانگ. دقیقاً نمی‌دانیم، از ۱ کوچکتر است. قبول که دارید؟

کلاس. بله

سرژلانگ. خوب، اینجا است که به قضیهٔ فیثاغورس احتیاج داریم. اجازه دهـید اولیـن



استوانه را رسم کنم.

درشکل، مثلث قائم الزاویه OA_1B_1 را داریم. و قبول کردیم که در مثلث قائم الزاویه:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

در مثلث OA_1B_1، a چیست؟

کلاس. شعاع استوانه است.

سرژلانگ. درست است و شعاع استوانه r_1 است. و b چیست؟

یکی از شاگردان (فیلیپ): ارتفاع است.

سرژلانگ. و ارتفاع برابر است با چقدر؟

فیلیپ: $\frac{1}{6}$.

سرژلانگ. درست و c مساوی است با؟

فیلیپ. شعاع توپ است.

سرژلانگ. که مساوی است با چقدر؟

فیلیپ. آه...۱.

سرژلانگ. دقیقاً همینطور است، پس داریم:

$$r_1^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=1^2$$

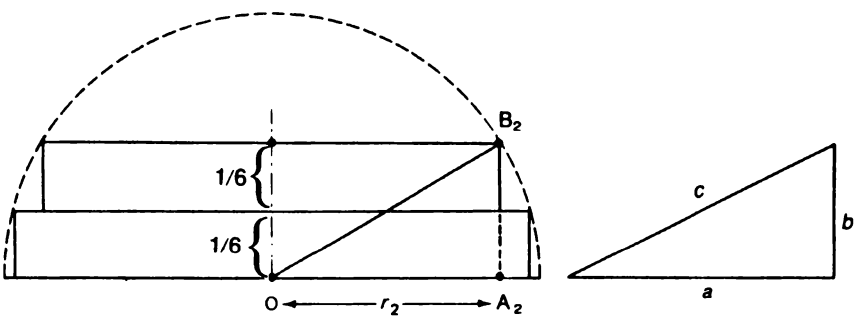
این را قبول داری؟

فیلیپ. بله .

سرژلانگ. پس r_1^2، مساوی است با؟

فیلیپ. $1-\left(\frac{1}{6}\right)^2$.

سرژلانگ. درست است،آفرین. حالا استوانه دومی را ببینیم. اجازه بدهید آن را رسم کنم.



مثلث جدید OA_2B_2 را داریم. در این مثلث a چیست؟

فیلیپ. شعاع استوانه است.

سرژلانگ: بله، شعاع دومین استوانه، r_2 و b ؟

فیلیپ. A_2B_2 است.

سرژلانگ: که مساوی است با...؟

فیلیپ. $\frac{2}{6}$.

سرژلانگ. آفرین. c هم مثل قبل مساوی است با ۱. خوب r_2^2 چقدر است؟

یکی دیگر از شاگردان. پس r_2^2 مساوی خواهد شد با $1^2-(\frac{2}{6})^2$ ؟

سرژلانگ: دیدید! و بعدی r_3 خواهد بود، و داریم ؟ $=r^2_3$.

شاگرد. $r^2_3=1-(\frac{3}{6})^2$

سرژلانگ. درست است. مشکلی نیست؟ می‌توانیم ادامه دهیم؟ همین وضع را با r_4 و r_5 و r_6 داریم. آنها را می‌نویسیم. [شاگردان با صدای بلند تکرار می‌کنند.]

$$r^2_1=1-(\frac{1}{6})^2$$

$$r^2_2=1-(\frac{2}{6})^2$$

$$r^2_3=1-(\frac{3}{6})^2$$

$$r^2_4=1-(\frac{4}{6})^2$$

$$r^2_5=1-(\frac{5}{6})^2$$

و

$$r^2_6=1-(\frac{6}{6})^2$$

حالا دربارهٔ شعاع استوانه‌ها چیزهایی می‌دانیم. در مورد ارتفاع استوانه‌ها چطور؟

یکی از شاگردان (کارین). بستگی دارد. $\frac{1}{6}$ یا $\frac{2}{6}$ یا...

سرژلانگ. نه، این متعلق به مثلثها است، این وقتی بود که می‌خواستیم شعاعها را اندازه بگیریم. ولی استوانه‌ها، همه ارتفاع یکسانی دارند. این ارتفاع چقدر است؟

شاگرد. $\frac{1}{6}$.

سرژلانگ. درست است، آفرین، $\frac{1}{6}$. و شعاع استوانه‌ها بستگی به استوانه‌ها دارد. شعاعها تغییر می‌کنند. اولین شعاع r_1 است. دومین شعاع r_2. و سومی r_3 ... آنها به تدریج کوچک می‌شوند. مشکلی نیست؟ حالا، حجم استوانه را چگونه محاسبه می‌کنند؟

یکی از شاگردان (راژنا) قاعده ضرب در ارتفاع.

سرژلانگ. بله $\pi r^2 h$. شعاع استوانهٔ اولی r_1 است. و حجم این استوانه برابر است با...
چندشاگرد. [باهم] πr_1^2 ضرب در $\frac{1}{6}$.
سرژلانگ. و حجم دومین استوانه چقدر است؟
شاگردان. πr_2^2 ضرب در $\frac{1}{6}$.
شاگردان دیگری. πr_2^2 ضرب در $\frac{1}{6}$.
سرژلانگ. چه کسانی گفتند $\frac{1}{6}$؟ [بعضی از دستها بالا می‌رود.]
سرژلانگ. چه کسانی گفتند $\frac{2}{6}$؟ [دستهای دیگری بالا می‌رود...]
سرژلانگ. نه، نه! ارتفاع استوانه دومی هم $\frac{1}{6}$ است. درست است؟
در این صورت حجم استوانه دومی چقدر است؟ مساوی است با:

$$v=\pi r_2^2 \frac{1}{6}$$

و حجم استوانهٔ سومی؟
راژنا. $\pi r_3^2 \frac{1}{6}$ است.
سرژلانگ. درست است. و استوانه بعدی، آن؟
آن. πr_4^2 ضرب در $\frac{1}{6}$.
سرژلانگ. بله. ولی مجذور شعاعهای r_1 و r_2 را چند لحظه پیش پیداکردیم. این مجذورها برابرند با؟
نورا. $1-\left(\frac{1}{6}\right)^2$ و $1-\left(\frac{2}{6}\right)^2$ و ...
سرژلانگ. خوب، اگر حجمها را با هم جمع کنیم چه به دست می‌آوریم؟ تو، اسمت چیست؟
شاگرد. سیم لانگ.

سرژلانگ. عجب، هم نام هستیم! [خنده] خوب، پس جمع می‌کنیم.
[وسرژلانگ ضمن نوشتن از شاگردان می‌پرسد.] حجم اولی چقدر است، سیم لانگ؟
سیم لانگ. $\pi r_1^2 \times \frac{1}{6}$
سرژلانگ. و r_1^2 مساوی است با چقدر؟
سیم لانگ. $1-\left(\frac{1}{6}\right)^2$.
سرژلانگ. خوب، بنابراین حجم اولین استوانه مساوی است با:

$$\pi\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^2\right]\times\frac{1}{6}$$

دومین استوانه؟

سیم لانگ. $\pi[1-(\frac{2}{6})^2]\times\frac{1}{6}$

سرژلانگ. و استوانه سومی؟

سیم لانگ. $\pi[1-(\frac{3}{6})^2]\times\frac{1}{6}$

سرژلانگ. آفرین. پس ادامه می‌دهیم تا حاصل جمع حجمها را به دست آوریم.

= حاصل جمع حجمهای استوانه‌ها

$$\pi[(1-(\frac{1}{6})^2]\times\frac{1}{6}+\pi[1-(\frac{2}{6})^2]\times\frac{1}{6}+\dots+\pi[1-(\frac{6}{6})^2]\times\frac{1}{6}.$$

حالا فرض کنید به جای شش استوانه، هفت استوانه داشتیم، در این صورت حاصل جمع چه خواهد بود؟ تو،اسمت چیست؟

یکی از شاگردان. سریل.

سرژلانگ. خوب سریل، حاصل جمع چقدر است؟

سریل. باید به جای ۶، عدد ۷ قرار دهیم. می‌شود:

$$\pi[1-(\frac{1}{7})^2]\times\frac{1}{7}$$

سرژلانگ. آفرین و تاکجا ادامه پیدا می‌کند؟

سریل. $\pi[1-(\frac{7}{7})^2]\times\frac{1}{7}$

سرژلانگ. حالا، می‌توانیم اعداد ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰،... اختیار کنیم.چه می‌شود اگر n را اختیار کنم. حجم استوانه اولی چقدر می‌شود؟

سریل. $\pi[1-(\frac{1}{n})^2]\times\frac{1}{n}$

سرژلانگ. خیلی عالی است! و استوانه بعدی؟یکی دیگر.

یکی از شاگردان. $\pi[1-(\frac{2}{n})^2]\times\frac{1}{n}$

سرژلانگ. بله. و همین طور ادامه پیدا می‌کند. آخرین استوانه چطور؟ [به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.] اسم شما چیست؟

شاگرد. کالازا. $\pi[1-(\frac{n}{n})]\times\frac{1}{n}$

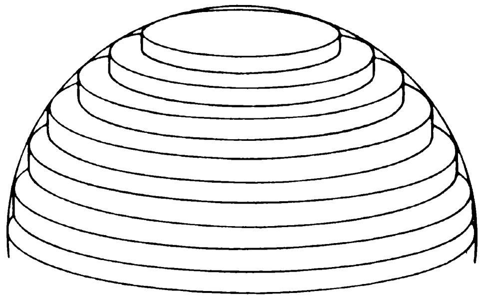
سرژلانگ. درست است پس مجموع حجمهای همهٔ استوانه‌ها برابر است با:

$$\text{مجموع حجمها}=\pi[1-(\frac{1}{n})^2].\frac{1}{n}+\pi[1-(\frac{2}{n})^2].\frac{1}{n}+\dots+\pi[1-(\frac{n}{n})^2].\frac{1}{n}.$$

حالا، اگر n بزرگتر و بزرگتر می‌شود، این مجموع به چه می‌انجامد؟ به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

کلاس. ؟؟؟

سرژلانگ. استوانه‌ها را بیشتر و بیشتر می‌کنم. این‌طور.



حاصل جمع حجمهای استوانه‌ها به چه چیزی میل می‌کند؟

فیلیپ. حجم توپ.

سرژلانگ. [می‌نویسد.]

وقتی‌که n بزرگتر و بزرگتر شود، مجموع حجمهای استوانه‌ها به حجم نصف توپ به شعاع ۱ میل می‌کند.

پس حالا، مسئله این است: در سَمت راست عبارت موقعی‌که n بزرگتر و بزرگتر شود چه اتفاقی می‌افتد؟

آن. می‌توانید آن را محاسبه کنید.

سرژلانگ. می‌خواهید آن را مستقیماً محاسبه کنید؟ خوب، چگونه؟

آن. حجمها را یکی یکی محاسبه می‌کنیم.

سرژلانگ. بله، این‌کار در صورتی فایده دارد که تعداد استوانه‌ها محدود باشد. مثلاً شش یا ده استوانه باشند ولی دربارهٔ n؟ وقتی که n بزرگتر و بزرگتر شود؟ برای n نمی‌توانی عددی تعیین کنی. بنابراین تنها چاره‌ای که داریم این است که تصور کنیم وقتی که n بزرگتر و بزرگتر می‌شود، برای این مجموع چه اتفاقی می‌افتد. ولی این کار بماند برای بعد از نهار. تا بعدازظهر خداحافظ.

جلسهٔ دوم

[شاگردان پس از نهار به کلاس آمده‌اند.]

سرژلانگ. خوب، برگشتیم به کلاس. مسئله ما پیدا کردن حجم توپی به شعاع ۱ بود. برای حجم نصف توپ، عبارتی به دست آوردیم

$$\pi\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}+\pi\left[1-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\pi\left[1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}$$

در این عبارت n بزرگتر و بزرگتر می‌شود. می‌توانیم از π فاکتور بگیریم از $\frac{1}{n}$ هم می‌توانیم فاکتور بگیریم. پس می‌توانیم عبارت را این طور بنویسیم:

$$\frac{\pi}{n}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^2+1-\left(\frac{2}{n}\right)^2+1-\left(\frac{3}{n}\right)^2+\ldots+1-\left(\frac{n}{n}\right)^2\right].$$

حالا به داخل کروشه نگاه کنید، چند تا یک دیده می‌شوند. یک در میان، می‌توانید آنها را بشمارید؟

کلاس. n تا

سرژلانگ. بله، پس

$$\frac{\pi}{n}(n-\text{یک چیزی باید کم شود})$$

چه چیزی را باید کم کنیم؟

راژنا. $\left(\frac{1}{n}\right)^2$.

سرژلانگ. درست است. و بعد؟

راژنا. $\left(\frac{2}{n}\right)^2$.

سرژلانگ. آفرین. و بعد؟ کریستوفر؟

کریستوفر. $\left(\frac{3}{n}\right)^2$.

سرژلانگ. درست، تا $\left(\frac{n}{n}\right)^2$. پس تفریق می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2.$$

و اگر همه عبارت را به طور کامل بنویسیم، کریستوفر؟

کریستوفر. $[\,{}^{۲}(\frac{n}{n}) + ...{}^{۲}(\frac{۲}{n}) + {}^{۲}(\frac{۱}{n})\,]\,\frac{\pi}{n} - \frac{n}{n} \times \pi$

سرژلانگ. و $\frac{n}{n}\pi$ برابر است با؟

کریستوفر. π

سرژلانگ. بله. حالا کم کن...

ناتالی. $\frac{\pi}{n}$.... آآ

سرژلانگ. درست است، ادامه بده

ناتالی. ضرب در ... $+ {}^{۲}(\frac{۳}{n}) + (\frac{۲}{n}) + {}^{۲}(\frac{۱}{n})$

سرژلانگ. آفرین، تا $(\frac{n}{n})$ پس فرمول می‌شود:

$$\pi-\pi\,[\,(\frac{۱}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n} + (\frac{۲}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n} + (\frac{۳}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n} + ... + (\frac{n}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}\,],$$

و این عبارت، وقتی که n بزرگتر و بزرگتر می‌شود، به حجم نصف توپ نزدیک می‌شود. و حالا اگر فرمولی که در اول از آن صحبت کردیم، درست باشد، در این صورت، عبارت داخل کروشه باید به چه چیزی نزدیک شود؟

کلاس. ؟؟؟

سرژلانگ. فرض کردیم که حجم توپ به شعاع ۱ مساوی است با $\frac{۲}{۳}\pi$. و این عبارت را هم به دست آوردیم:

$$\pi-\pi\,[\,(\frac{۱}{n})^{۲}\,\frac{۱}{n} +...+ (\frac{n}{n})^{۲}\,\frac{۱}{n}\,].$$

اگر این عبارت به دوسوم π میل کند، پس حاصل جمع داخل کروشه میل می‌کند به؟ متوجه می‌شوید؟ یک π دارم، و کسری از π از آن کم می‌کنم. چیزی می‌خواهم که باقیمانده بشود دوسوم π. پس کسر باید چه باشد؟

یکی از شاگردان. $\frac{۱}{۳}$

سرژلانگ. همین است! یک سوم. اسمت چیست؟ الیزابت؟ او فهمید. الیزابت فهمید. عبارت داخل کروشه به $\frac{۱}{۳}$ میل می‌کند. آفرین. همین را می‌خواستیم ثابت کنیم. اگر بتوانیم این کار را بکنیم، پیروز می‌شویم. خوب، پس بنویسیم. تا حالا، ثابت کردیم که:

حجم کل استوانه‌ها مساوی است با

$$\pi-\pi\,[\,(\frac{۱}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n} + (\frac{۲}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n} +...+ (\frac{n}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}\,],$$

و حالا، می‌خواهیم ثابت کنیم که حاصل جمع

$[\,(\frac{۱}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n} + (\frac{۲}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n} +...+ (\frac{n}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}\,]$ به $\frac{۱}{۳}$ میل می‌کند.

در نگاه اول، چیز زمختی به‌نظر می‌رسد، چند مجذور داریم، یک عالمه n، و اصلاً معلوم نیست. حاصل جمع در کدام صراط مستقیم است. چه باید کرد؟

کلاس. ؟؟؟

سرژلانگ. اگر مجذورها نبودند، فکر می‌کنید می‌توانستید آن را جمع و جور کنید؟ خوب، عبارتِ پر از مجذور داریم و نمی‌دانیم چه کنیم؟ مسئلهٔ بغرنجی به نظر می‌رسد. در فکریم که مسئله رابه مسئله مشابه ولی ساده‌تر تبدیل کنیم. ببینیم بدون توان دو کار به کجا می‌کشد. یک لحظه فرض می‌کنم که توان دو نیست و حاصل جمع را می‌نویسم. خوب، به چه صورتی در می‌آید؟ کریستوفر

کریستوفر.

$$\frac{۱}{n}\cdot\frac{۱}{n}+\frac{۲}{n}\cdot\frac{۱}{n}+\frac{۳}{n}\cdot\frac{۱}{n}\ \ldots+\frac{n}{n}\cdot\frac{۱}{n}.$$

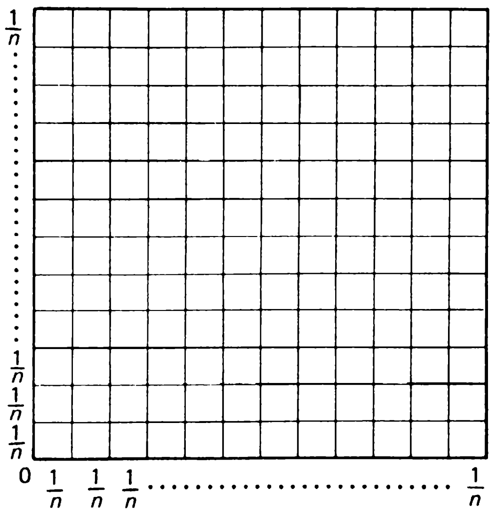
سرژلانگ. درست است. حالا جمع کسرهایی را داریم که مخرج آنها مساوی است با... الیزابت؟

الیزابت. n.n.

سرژلانگ. بله، همچنین می‌توان گفت مجذور n ولی تو درست گفتی، می‌توانیم آنرا فعلاً n ضرب در n در نظر بگیریم و کاری به کارش نداشته باشیم. و صورت کسرها؟

الیزابت. ۱، ۲، ۳، ۴، ... n.

سرژلانگ. بله، و حاصل جمع را چگونه سر هم بیاوریم؟ بگذارید شکلی را بکشم. این طور مربعی با اضلاع ۱ اختیار می‌کنم، مربع را به مربعات کوچکی به اضلاع $\frac{۱}{n}$ تقسیم می‌کنم.



گوشهٔ پایینی سمت چپ را صفر می‌گیریم. می‌رویم به طرف راست، نقاط $\frac{۱}{n}$، $\frac{۲}{n}$، $\frac{۳}{n}$،... را می‌بینم و آخرین نقطه چیست ... کریستوفر؟

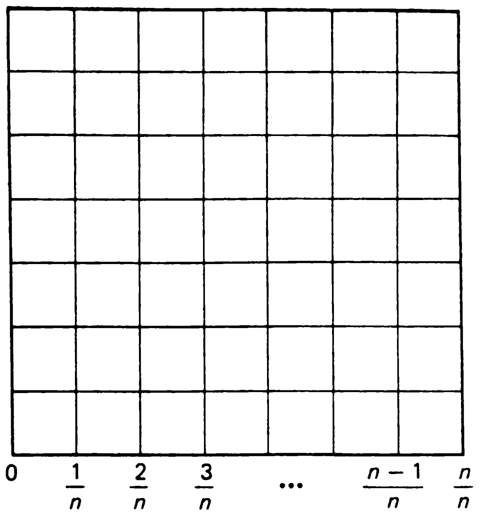
کریستوفر. $\frac{n}{n}$

سرژلانگ. آفرین. و یکی مانده به آخر؟

ناتالی. $\frac{(n-۱)}{n}$

سرژلانگ. درست است. و نقطهٔ قبل از آن؟

همهٔ شاگردان باهم: $\frac{(n-۲)}{n}$



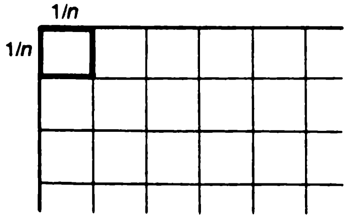
سرژلانگ. بله، همین کار را هم به طرف بالا انجام می‌دهم بالا و پایین، می‌خواهیم

$$\frac{۱}{n}\cdot\frac{۱}{n}+\frac{۲}{n}\cdot\frac{۱}{n}+\ldots+\frac{n-۱}{n}\cdot\frac{۱}{n}+\frac{n}{n}\cdot\frac{۱}{n}$$

را پیدا کنم. $\frac{۱}{n}\cdot\frac{۱}{n}$ روی شکل چه می‌شود؟

کلاس. ؟؟؟

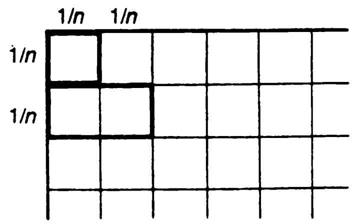
سرژلانگ. $\frac{۱}{n}$ ضرب در $\frac{۱}{n}$ که می‌شود؟ می‌شود مساحت مربعی با اضلاع $\frac{۱}{n}$. این مربع کوچک را در مربع بزرگ پر رنگ می‌کنم. اجازه بدهید این یکی را که در گوشهٔ بالایی سمت چپ قرار دارد، پر رنگ کنم.



و بعدی؟ می‌شود $\frac{۲}{n}$ ضرب در $\frac{۱}{n}$. که نشان دهندهٔ؟

یکی از شاگردان. دو مربع کوچک.

سرژلانگ. درست است، که مستطیلی است به طول $\frac{۲}{n}$ و عرض $\frac{۱}{n}$ این مستطیل را درست زیر مربع اولی پررنگ می‌کنم.



دربارهٔ $\frac{۳}{n}$ ضرب در $\frac{۱}{n}$ چه می‌توان گفت؟

کلاس. مستطیلی به طول $\frac{۳}{n}$.

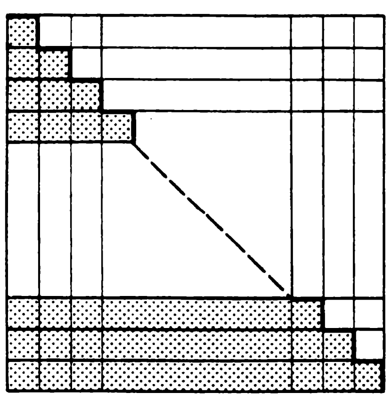
سرژلانگ. و با جملهٔ $\frac{(n-۱)}{n}$؟

کلاس. مستطیلی است به طول $\frac{(n-۱)}{n}$

سرژلانگ. و بالاخره؟

کلاس. مستطیلی است به طول $\frac{n}{n}$

سرژلانگ. درست. به طول ۱، این طور، ردیف آخر به طور کامل اشغال می‌شود. شکل به صورت پله در آمد.



و حاصل کار دقیقاً مساحت پله است. حالا، اگر n را بزرگ کنم، بزرگتر و بزرگتر، پله به چه شکلی در می‌آید؟

وانیا. تعداد پله‌ها زیاد می‌شود.

سرژلانگ. دقیقاً همین‌طور است. پله‌ها زیاد زیاد می‌شوند. و مساحت سطح آنها، وقتی که n بزرگتر و بزرگتر می‌شود، میل می‌کند به؟

شاگرد. به نصف مربع میل می‌کند.

سرژلانگ. اسمت چیست؟

شاگرد. ریوکا

سرژلانگ. فهمیدی، ریوکا، فهمید، اجازه بدهید بنویسیم.

وقتی n بزرگ می‌شود. مساحت پله به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند.

همه، با ریوکا موافقید؟ از هر نظر؟ بسیار خوب پس کار را از مجموعی که توان دو داشت آغاز کردیم و بعد مجموع ساده‌تری را در نظر گرفتیم که توان نداشت و حالا فهمیدیم که این مجموع ساده، پله است و ثابت کردیم که وقتی که n بزرگتر و بزرگتر می‌شود، مجموع به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند. فوق‌العاده است. شما واقعاً خوبید [خنده.]

حالا می‌دانیم که چه باید کرد. می‌توانیم برگردیم به آن مجموع اولی که توان دو داشت. درست است؟ [شاگردان تصدیق می‌کنند] مجموع را یک بار دیگر می‌نویسم:

$$\left(\frac{۱}{n}\right)^{۲}.\frac{۱}{n}+\left(\frac{۲}{n}\right)^{۲}.\frac{۱}{n}+\left(\frac{۳}{n}\right)^{۲}.\frac{۱}{n}+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^{۲}.\frac{۱}{n}$$

چه کار کنیم؟ [چشمها کنجکاو می‌شوند.]

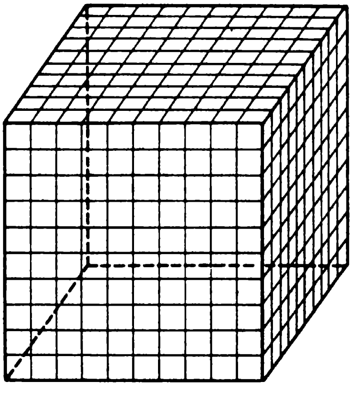
بسیار خوب؛ یک جمله از مجموع مثلاً $\frac{۱}{n}\cdot{}^{۲}\left(\frac{۲}{n}\right)$ رادر نظر بگیرید. این جمله چیست؟ نمایندهٔ چیست؟ حجم است، این طور نیست؟ اگر مربع چیزی را در چیز دیگر ضرب کنم، حجم جعبه‌ای به دست می‌آید که یک طرف $\frac{۱}{n}$ و دو طرف دیگر $\frac{۲}{n}$ است. موافقید؟ خوب است، حالا چند جعبه داریم؟

یکی از شاگردان (ستفانی). n

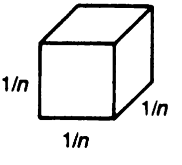
سرژلانگ. درست، n. قبلاً n مستطیل داشتیم. آنها را داخل یک مربع بزرگ رسم کردیم و حالا n جعبه داریم آنها را رسم می‌کنیم در .... چه چیزی؟

ستفانی. مکعب بزرگی با مکعبهای کوچک.

سرژلانگ. [با تحسین] آه! مطلب را فهمیدی. درست است. پس مکعب بزرگی با اضلاع ۱ رسم می‌کنیم و آن را به مکعبهای کوچکی به اضلاع $\frac{۱}{n}$ تجزیه می‌کنیم.



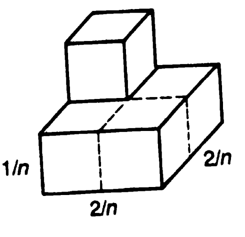
خوب، این هم مکعب بزرگ. حالا اولین جملهٔ این مجموع $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$ است، که نماینده چیست؟ حجم مکعبی که همهٔ اضلاع آن مساوی $\frac{1}{n}$ است. این مکعب را هم مثل آن مربع قبلی رسم می‌کنم.



و دومین جمله، $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2$ این چیست؟ مکعب نیست.

فیلیپ. جعبهٔ پهنی است؟

سرژلانگ. درست است، جعبه‌ای پهن که دو ضلع آن مساوی $\frac{2}{n}$ و ارتفاع آن $\frac{1}{n}$ است. پس جعبه پهن را درست زیر اولی رسم می‌کنم.

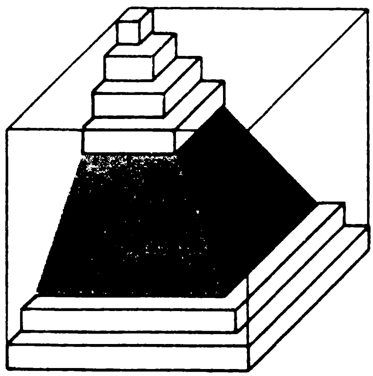


و جملهٔ سوم، $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^2$ ؟ الیزابت؟

الیزابت. جعبه پهن با اضلاع $\frac{3}{n}$.

سرژلانگ. درست است، ارتفاع باز هم $\frac{1}{n}$ و طول اطراف برابر است با $\frac{3}{n}$.

همین طور ادامه می‌دهیم تا اینکه به $\frac{n}{n}$ برسیم.



بنابراین در مجموع مجذورها نیز پلکانی حاصل می‌شود ولی این بار پلکانی واقعی و دارای حجم، پلکان سه بعدی و حقیقی. حالا، اگر n بزرگتر و بزرگتر بشود، پلکان به چه چیزی میل می‌کند؟

یکی از شاگردان. $\frac{1}{3}$.

شاگرد دیگری. $\frac{1}{2}$

سرژلانگ. باز هم نظر دیگری هست؟

سوفی. هرم

سرژلانگ. آهان پیدات کردم! همین را می‌خواستم بشنوم. وقتی n بزرگ می‌شود. پلکان به هرم میل می‌کند. شما هم با این نظر موافقید؟ و این هرم را چگونه به دست می‌آوریم؟ با به هم پیوستن یک گوشه، رأس، در بالا و سمت چپ به وجه مقابل در پایین. مقابل گوشه دستِ چپ بالا، چند وجه وجود دارد؟

ریوکا. سه تا

سرژلانگ. بله. سه وجه مقابل. و این یعنی سه هرم می‌توان مانند این پلکان داشت. این سه هرم مکعب را پر می‌کنند. بنابراین حجم یک هرم چقدر است؟

وانیا. $\frac{2}{3}$.

سرژلانگ. نه. در مکعب چند هرم وجود دارد؟

وانیا. سه تا.

سرژلانگ. و حجم مکعب برابر است با ...؟

وانیا. ۱.

سرژلانگ. بنابراین حجم هرم مساوی است...؟

وانیا. $\frac{۱}{۳}$.

سرژلانگ. درست است. $\frac{۱}{۳}$، حالا برگردیم به پلکان دارای ارتفاع $\frac{1}{n}$، وقتی n بزرگ می‌شود، پلکان به شکل هرم میل می‌کند، درست است؟ پس این مطلب را می‌نویسم:

وقتی n بزرگ می‌شود، حجم پلکان به حجم هرمی که برابر $\frac{۱}{۳}$ است، میل می‌کند.

ما پیروز شدیم. ما به دنبال اثبات همین بودیم، یادتان هست که از چه چیزی شروع کردیم؟ از مجموع حجمهای استوانه‌ها شروع کردیم و رسیدیم به این عبارت:

$$\pi-\pi[(\frac{۱}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}+(\frac{۲}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}+(\frac{۳}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}+\ldots+(\frac{n-۱}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}+(\frac{n}{n})^{۲}\cdot\frac{۱}{n}],$$

جمعی پر از مجذور، برای حساب کردن جمع، نخست جمع مشابهی و بدون توان دو را بررسی کردیم. پلکانی یافتیم، مساحت پلکان، وقتی که n بزرگ می‌شد، به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کرد. و حالا، در جمع عبارت اصلی، می‌بینیم که مجموع به $\frac{۱}{۳}$ و به پلکان سه بعدی میل می‌کند. وقتی n بزرگ می‌شود، این حاصل جمع که به $\frac{۱}{۳}$ میل می‌کند و در واقع حجم یک رشته پلکان است. بنابراین حجم استوانه‌ها به

$$\pi-\frac{\pi}{۳}$$

میل می‌کند. و این برابر است با؟

الیزابت. $\frac{۲\pi}{۳}$.

سرژلانگ. پس آنچه که ما ثابت کردیم دقیقاً این است که نصف حجم کره برابر است با؟ الیزابت؟

الیزابت. $\frac{۲\pi}{۳}$.

سرژلانگ. و بنابراین حجم کل توپ می‌شود ...؟

الیزابت. $\frac{۴\pi}{۳}$.

سرژلانگ. این قضیه‌ای است که می‌خواستیم آن را ثابت کنیم. موفق شدیم!

قضیهٔ حجم توپ به شعاع ۱ مساوی $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

ضمناً، همچنین دربارهٔ آن جمع، وقتی که n بزرگ می‌شود، اطلاعاتی کسب کردیم.

عبارت اولی بدون توان دو:

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{n}+\dots+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

که به $\frac{1}{2}$ میل می‌کند.

عبارت دومی و دارای توان‌های دو از این قرار است:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{n}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

و به $\frac{1}{3}$ میل می‌کند.

و جمع بعدی چیست؟

کریستوفر. جمع دارای توان‌های سه:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}$$

که به $\frac{1}{4}$ میل می‌کند.

سرژلانگ. چه کسی می‌گوید $\frac{1}{4}$. آن، تو چه فکر می‌کنی؟

آن. هیچی، نمی‌دانم.

سرژلانگ. الیزابت؟ سیم لانگ؟

سیم لانگ. $\frac{1}{4}$.

سرژلانگ. در دو جمع اولی این را ثابت کردیم، ولی این یکی را هنوز ثابت نکردیم. و چهارمی که چه باشد؟

الیزابت.

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{n}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{n}$$

میل می‌کند به $\frac{1}{5}$

سرژلانگ. معرکه است. درست است. این یک قضیه است ولی چطور آن را ثابت کنیم؟

فیلیپ. ابعادی که بتوانیم از روی آنها $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3$ را بسط بدهیم و به $\frac{1}{4}$ برسیم وجود ندارد.

سرژلانگ. خیلی جالب است، خیلی خوب متوجه شدی، پس می‌توانیم ادامه بدهیم. تا سه بُعد، توانستیم شکلها و پلکان را رسم کنیم. ولی اگر بخواهیم این وضع را باز هم ادامه بدهیم...

یکی از شاگردان. خوب، می‌توانی خیال کنی که.

سرژلانگ. درست است. می‌شود آن را خیال کرد! باید هم همین کار را کرد. ولی زیاد قابل اطمینان نیست. خاطر جمعی ندارد و مشکل آفرین است، در واقع باید راه دیگری برگزید

چون احساس ما در ابعاد عالی ... ناتوان تر است. در مجموعی که شامل توان سه است کار به چند بُعد منجر می‌شود؟

فیلیپ. چهار

سرژلانگ. درست. و توان چهار بُعد پنجم را به میان می‌کشد. از آنچه می‌کنیم به هیچ وجه مطمئن نیستیم. احساس ممکن است با واقعیت منطبق نباشد. بنابراین برای تکمیل شهود هندسی متعلق به ابعاد عالی باید از مباحث جبری مدد جست. این کار را می‌توان کرد، ولی من فعلاً قصد انجام آن را ندارم. به هر حال، کار درستی است.

روشی که امروز از آن صحبت کردم، یعنی تقسیم توپ به استوانه‌ها و به دست آوردن مجموع آنها. می‌دانید چه کس اولین بار از آن استفاده کرد؟ ارشمیدس. اسمش را تا حالا شنیده‌اید؟ کریستوفر... بله، همان کسی است که از خزینهٔ حمام لخت پرید بیرون و فریاد زد: «یافتم». داستانش راکه شنیده‌اید. او آدم بسیار باهوشی بود. این روش را او ابتکار کرد. من تا حدودی کار او را تقلید کردم. پس خلاصه کنیم:

حجم توپی به شعاع ۱ مساوی $\frac{۴}{۳}\pi$ است.

و حجم توپی به شعاع r؟ کریستوفر؟ با استفاده از تجانس؟

فیلیپ.

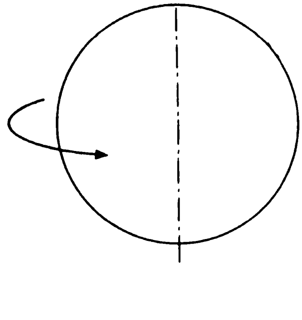
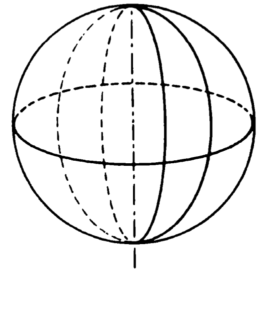
حجم توپ به شعاع r مساوی است با $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$.

سرژلانگ. بله شما بااستفاده از تجانس، $r^۳$ را بدست آوردید. کار درستی کردید. کلاس واقعاً خوبی دارید. شما خیلی هشیارید. من کمتر کلاسی دیده‌ام که تا این اندازه خوب باشد. شما واقعاً برجسته هستید.

سؤالی دارید؟ سؤال ریاضی یا هر چیز دیگر [دستی بالا می‌رود] بله؟

یکی از شاگردان (کارولین). برای حساب کردن سطح کره، نمی‌توانید قرص را بچرخانید؟

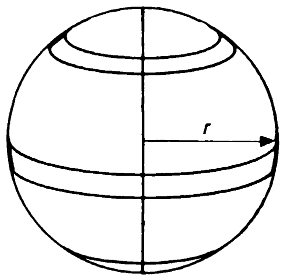
سرژلانگ. بله، می‌توانی؟ [خنده] به به! بله، بله، می‌توانی ولی... بسیار خوب، بیایید این کار را بکنیم. پیدا کردن سطح کره به وسیلهٔ چرخاندن قرص حول محور عمودی.

بسیار خوب، دور تا دور کره و یا نصف آن را که برابر با πr است، در نظر بگیرید. آن را بچرخانید، چه اتفاقی می‌افتد؟ باید πr را در چیزی ضرب کنیم

شاگرد. در محیط دایره‌ای که در وسط کره است.

سرژلانگ. بله، ولی در این صورت $۲\pi^۲ r^۲$ را به دست می‌آورید.



شاگردان. آهان!

سرژلانگ. و این در صورتی درست است که همهٔ قطعات کوچک آن نیم دایره دور دایره‌ای به شعاع r بچرخند. ولی می‌دانید که آن قسمتهایی که در بالا و یا در پایین کره قرار دارند، دور دایره‌هایی می‌چرخند که از دایرهٔ وسط کره کوچکترند. بنابراین فرمول $۲\pi^۲ r^۲$ نمی‌تواند درست باشد. من قبول می‌کنم که شما مساحت سطح را از چرخاندن نیم دایره به دست می‌آورید ولی چگونه به فرمول صحیح می‌رسید؟ متوجه مسئله هستید؟ اشکالی هست. باید این واقعیت را در نظر داشته باشید که بعضی از پاره‌ها حول دایره‌های کوچکی می‌چرخند.

فکر خوبی ارائه دادید ولی باید از دایره‌ای «متوسط» استفاده کنید. قضیه‌ای هم در آن مورد وجود دارد ولی پیچیده‌تر از آن است که الآن مطرح شود، معلوم هم نیست کار به کجا می‌کشد. فرمول مساحت کره را می‌دانید؟ از این قرار است.

$$\boxed{\text{مساحت سطح کره} = ۴\,\pi r^۲}$$

پس بنابراین فرمول، مساحت کره برابر است با نیم دایره ضرب در $۴r$، عامل π تکرار نمی‌شود. با روشی که گفتید می‌توان آن را اثبات کرد، ولی خیلی مشکل است. به همین دلیل من روش دیگری را ترجیح می‌دهم. ولی باید به وقت دیگری واگذار شود.

ملاحظات

از مصاحبت با شاگردان این کلاس، که هنوز کوچکتر از آن بودند که این مطلب را درک کنند لذت فراوان بردیم اگر چه معلم می‌تواند از این روش استفاده کند ولی بهتر است تا کلاسهای دهم یا یازدهم منتظر بماند در اینجا نیز مانند موارد دیگر، هندسه می‌تواند مسائلی را به وجود آورد که به جبر منتهی شود. به نظر من این موضوع می‌تواند زمینهٔ مناسبی برای کار جبری و برای آشنا شدن شاگردان با مفهوم n به وجود آورد.

مساحت سطح کره موضوع درس بعدی است.

ارشمیدس ۲۷۸ ـ ۲۱۲ ق.م

بزرگترین دانشمند و ریاضیدان ادوار گذشته است. وی در اسکندریه در مصر، نزد شاگردان اقلیدس به تحصیل علم پرداخت. شاید دربارهٔ هیچ دانشمندی به اندازهٔ ارشمیدس افسانه پردازی نشده باشد. این اساطیر چنان جاذبه‌ای دارند که کمتر کسی می‌تواند از تأثیر آنها برکنار بماند. حکایت تاج هرون و زرگر متقلب معروفترین داستانی است که راجع به ارشمیدس در کتابها آمده است بنابراین داستان، هرون به ماهرترین زرگر دوران خود دستور داده بود تاجی از زر ناب برایش بسازد، هرون طلای ناب به زرگر داد و او را از این که با طلا، نقره بیامیزد بر حذر داشت. زرگر تاج را ساخت و به حضور آورد. ولی هرون به‌کار زرگر ظنین شد و برای حصول اطمینان از کار زرگر از ارشمیدس خواست تا در این باره تحقیق کند. ارشمیدس لحظه‌ای از تفکر باز نایستاد ولی حیران و سرگشته راه به جایی نمی برد. از قضا روزی در حمام متوجه شد، هنگامی که دست و پای خود را در تشت پر از آبی قرار می‌داد، مقداری از آب تشت بیرون می‌ریزد، ناگهان گویی سروشی از غیب به مخیله‌اش راه یافت، بارقه‌ای از امید در کالبدش جان گرفت و به او الهام شد: «هر گاه جسمی در آبی فرو رود، مقداری از آب که هم حجم آن جسم است، جابه جا می‌شود» آنگاه با خود زمزمه کرد «اگر تاج از طلای ناب ساخته شده باشد، باید به اندازهٔ حجم آبی را که جابه جا می‌کند، طلای خالص داشته باشد. بنابراین با مقایسهٔ وزن تاج با وزن طلای خالص هم حجم آن می‌توان تحقیق کرد که تاج از طلای خالص ساخته شده است یا اینکه در ساختن آن نقره هم به‌کار رفته است.

ارشمیدس که از این کشف و شهود سر از پا نمی‌شناخت برهنه به خیابان دوید و فریاد زد «یافتم!یافتم!» به هر حال خود را به دربار هرون رساند و به مدد محاسبات

دقیق به تقلب زرگر پی‌برد.

ارشمیدس، با آنکه به این نوع تحقیقات که جنبهٔ عملی داشت ارجی نمی‌نهاد و بیشتر به کارهای نظری و هندسی می‌پرداخت و شهرت وی نیز از همین کارها نشأت گرفته است، ولی اختراعات او همگی شگفت انگیز و از هوش خارق العادهٔ وی پرده برمی‌دارد.

داستان مرگ این اندیشمند افسانه‌ای نیز معروف است. رومیان شهر سیراکوز را محاصره کرده بودند ولی در سال ۲۱۲ ق.م به نحو غافلگیر کننده‌ای به شهر وارد شدند. سیراکوزیان که ناگهان سربازان رومی را برابر خود دیدند، به هر سو گریختند. ولی ارشمیدس که برزمین شکلهای هندسی کشیده بود، و در حل مسئله‌ای غرق در تفکر بود و از آنچه در پیرامون خود می‌گذشت، خبر نداشت. ناگهان پای سربازی برشکلها دید، سرباز به او دستور داد که همراهش برود، ارشمیدس در حالیکه هنوز، بر شکلها خم شده بود، با خونسردی جواب داد: «پای خود را از شکل بردار، مسئله را که حل کردم، خود خواهم آمد.» سرباز از این رفتار ارشمیدس چنان به خشم آمد، که شمشیر خود را برپیکر وی فرود آورد.

محیط دایره

این درس در بهار سال ۱۹۸۳، در کلاس هشتم مدرسه‌ای در پاریس ایراد شد. در این درس با استفاده از دستور مساحت دایره، دستور محیط دایره را به دست آوردیم. این روش را می‌توان جایگزین شیوه‌ای که به دنبال «پی چیست» آمده به کار برد با این مزیت که با تعدیل ساده‌ای، دستور مساحت سطح کره را به مدد دستور حجم آن به دست آورد.

سرژلانگ. خوب، امسال چه می‌خوانید.

شاگردان. [خنده.] هیچی!

سرژلانگ. آه اذیت نکنید! باید درسی داشته باشد! چه چیزهایی خوانده‌اید؟

بعضی از شاگردان. فاکتور گیری، اتحادها.

سرژلانگ. و از هندسه؟ امروز می‌خواهیم مطلبی از هندسه بگوییم. دایره و قرص را می‌دانید چیست؟

یکی از شاگردان. بله.

سرژلانگ. می‌دانید مساحت قرص از چه فرمولی به دست می‌آید؟

شاگرد. [با مکث.] بله.

سرژلانگ. از چه فرمولی؟

شاگرد. مجذور r ضرب در π.

سرژلانگ. درست است. مساحت قرصی به شعاع r مساوی است با πr^2 و محیط دایره چطور؟

شاگرد. π ضرب در قطر.

سرژلانگ. و به صورت تابعی از شعاع؟

شاگرد. $2\pi r$.

سرژلانگ. بله، اثبات این فرمولها رابلدید؟ این فرمولها را چگونه ثابت می‌کنید؟

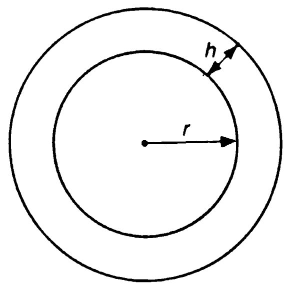
[سکوت پرسش برانگیز]

شاگرد. اِ...

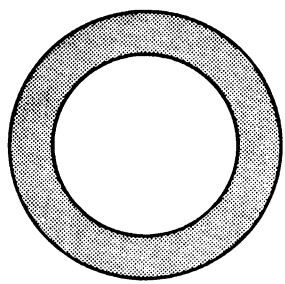
سرژلانگ. بسیار خوب، قصد من این است که از بااستفاده از فرمول اولی، فرمول دومی را ثابت کنم، فرض کنید که فرمول اولی را می‌دانیم و قصد اثبات فرمول دومی را داریم،

فرض می‌کنیم می‌دانیم که مساحت قرص برابراست با πr^2، و می‌خواهیم فرمول محیط دایره را که $C = 2\pi r$ ثابت کنیم.

پس دایره‌ای داریم به شعاع r، دایره‌ای رسم می‌کنم که اندکی از r بزرگتر باشد. r به‌علاوه یک مقداری



این مقدار را h می‌نامیم. پس شعاع دایرهٔ بزرگتر مساوی است با r+h بین دو دایره، کمربندی را می‌بینید. کمربند را باپرداز مشخص می‌کنم، این طور:



کلاس: مساحت قرص بزرگ منهای مساحت قرص کوچک است.

سرژلانگ: دقیقاًممکن‌است، ولی این‌مساحتها‌را داریم ومی توانیم فرمول آنها را بنویسیم. مساحت قرص چقدر است؟

شاگرد: πr^2 است.

سرژلانگ. بسیار خوب.مساحت قرص بزرگ چقدر می‌شود؟ [نگاه شاگردان کنجکاو می‌شود] فرمول مساحت قرص به شعاع r را می‌دانیم، که برابر است با πr^2. اگر شعاع قرص ۲

باشد، مساحت قرص چقدر می‌شود؟ می‌شود $\pi ۲^۲$ و یا ۴π. درست است؟ و اگر شعاع قرص ۳ باشد، مساحت قرص چقدر می‌شود؟ شما، اسمتان چیست؟

شاگرد. نانسی. می‌شود π ضرب در مجذور ۳ یعنی ۹π.

سرژلانگ. درست است. و مساحت قرص به شعاع ۴ چقدر است؟ نانسی.

نانسی. $\pi ۴^۲$ یا ۱۶π.

سرژلانگ. بسیار خوب و مساحت قرصی به شعاع ۱۰؟

نانسی. $\pi ۱۰^۲$.

سرژلانگ. و مساحت قرصی به شعاع r؟

نانسی. πr^2.

سرژلانگ. و مساحت قرصی به شعاع $(r+h)$؟

نانسی. [با مکث] $\pi(r+h)^2$؟

سرژلانگ. بله، درست یادگرفتید، $\pi(r+h)^2$. حالا می‌توانیم مساحت کمربند را بنویسیم:

$$\pi(r+h)^2-\pi r^2$$

همه موافقید؟[شاگردان تأیید می‌کنند] حالا با این فرمول چه کار کنیم؟

یکی از شاگردان. می‌توانیم چند عمل جبری انجام دهیم.

سرژلانگ. بله، که در این صورت، $(r+h)^2$ را چه کنیم؟ [رو به معلم کلاس می‌کند.] این اتحاد را درس دادید؟

شاگردان، با هم. ... $a^2 + 2ab +$

سرژلانگ. دست نگهدارید، همه باهم نه، شما، اسمتان چیست؟

شاگرد. رتیا.

سرژلانگ. بسیار خوب، رتیا، $(a+b)^2$ برابر است با چقدر؟

یکی از شاگردان. این یک اتحاد است.

سرژلانگ. چه کسی می‌داند؟

یکی از شاگردان. می‌شود: $a^2 + 2ab + b^2$

سرژلانگ. درست است، $(a+b)^2=a^2 + 2ab + b^2$.

این اتحاد را باید خوانده باشید، مگر نه؟

شاگردان. آن را با v و w خوانده‌ایم.

سرژلانگ. وقتی من بچه بودم آن را، a و b خوانده بودم. ولی فرقی نمی‌کند. و اگر آن را با r و h بگیریم، باز هم توفیر نمی‌کند. بنابراین $(r+h)^2$ برابر است با؟

شاگردان. [باهم]: $r^2 + 2rh + h^2$

سرژلانگ. آفرین، $r^2+2rh+h^2$. می‌توانید این اتحاد را ثابت کنید؟

شاگردان. ضرب می‌کنیم.

سرژلانگ. بله، این ضرب را به طور مفصل انجام دهیم. $(r+h)^2$ دقیقاً یعنی $(r+h)$ ضرب در $(r+h)$ است. خوب، حالا چه کار کنم؟

[همه شاگردان یک دفعه با هم صحبت می‌کنند. سرژلانگ روی تخته سیاه می‌نویسد:]

$(r+h)(r+h)=r(r+h)+h(r+h)$

و بعد از این، چه باید کرد؟ شما، اسمتان چیست؟

یکی از پسران. کریستوفر. نتیجه می‌شود. $r^2+rh+hr+h^2$

سرژلانگ. یعنی...

کریستوفر. $r^2+2rh+h^2$

سرژلانگ. درست گفتید، اتحاد $(r+h)^2$ را ثابت کردیم. حالا آن را حفظ کنیم، از چه حروفی استفاده کنیم از v و w یا از b و a؟کدام یک؟ پس مجذور حاصل جمع دو جملهٔ a و b برابر است با مجذور a به علاوه دو برابر ab به علاوهٔ مجذور b. همه با هم تکرار کنیم.

سرژلانگ و شاگردان. مجذور حاصل جمع a و b مساوی است با مجذور a به علاوهٔ دو برابر ab به علاوه مجذور b.

سرژلانگ. بسیار خوب، گوشتان با آن آشنا شد؟ دیگر هرگز آن را فراموش نخواهید کرد؟ هر مطلبی را باید این طور حفظ کرد. شب، قبل از خواب سه یا چهار بار آن را تکرار کنید، روز بعد، آن را بلدید. خودم این طور یادگرفتم. و اما $(r+h)^2$ ؟

شاگردان. مجذور $(r+h)$ مساوی است با مجذور r به علاوه دو برابر rh به‌علاوه h^2.

سرژلانگ. آفرین. حالا می‌توانیم عمل تفریق را انجام دهیم.

$$\pi(r+h)^2-\pi r^2$$

مساوی است با چقدر؟مساوی است با:

$$\pi(r^2+2rh+h^2)-\pi r^2$$

در این صورت جواب چقدر می‌شود؟ شما[به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.] ، اسمتان چیست؟

یکی از شاگردان. جری.

سرژلانگ. جواب چقدر می‌شود؟

جری. $۲rh+h^۲$.

سرژلانگ. این جواب درست است؟ [بعضی از شاگردان اشاره‌می‌کنند به اینکه چیزی حذف شده است] دقت کنید! π جلو پرانتز است. پس $\pi r^۲$ و $-\pi r^۲$ حاصل می‌شود که حذف می‌شوند، و می‌ماند π ضرب در $۲rh+h^۲$. درست است؟ بنابراین برای به دست آوردن مساحت کمربند فرمولی به دست آوردیم. این فرمول را می‌نویسم.

[مساحت کمربند برابر است با

مساحت قرص به شعاع $(r+h)$ منهای مساحت قرص به شعاع r

به عبارت دیگر

مساحت قرص $=\pi(۲rh+h^۲)$

درست است؟ اعتراضی نیست؟

یکی از شاگردان. نه، مابه شما اعتماد داریم [خنده.]

سرژلانگ. نه، نه! شما نباید به من اعتماد کنید! سؤال این است که آیا شما فهمیدید یا نه.

یکی از شاگردان. تقریباً.

سرژلانگ. فهمیدید مساحت کمربند چگونه به دست می‌آید؟

شاگرد. اِ...[به شکل نگاه می‌کند.] دایره کوچک را از دایرهٔ بزرگ منها کردیم.

سرژلانگ. تاحدودی درست است. مساحت دایرهٔ کوچک را از مساحت دایرهٔ بزرگ کم کردیم. مساحت قرص کوچک به شعاع r برابر است با $\pi r^۲$. شعاع قرص بزرگ چقدر است؟

کریستوفر. $r+h$.

سرژلانگ. و مساحت آن چقدر است؟ مساحت آن $\pi(r+h)^۲$ است. و بعد، و مساحت قرص به شعاع r، یعنی $\pi r^۲$ راکم می‌کنیم. و سرانجام با استفاده از جبر، $(r+h)^۲$ را محاسبه و عبارت.

$$\text{مساحت کمربند}=\pi(۲rh+h^۲)$$

رابه‌دست می‌آوریم.

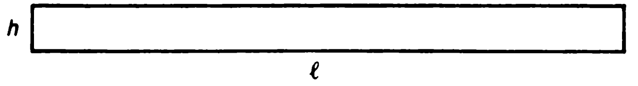
قانع شدید؟

کریستوفر. بله

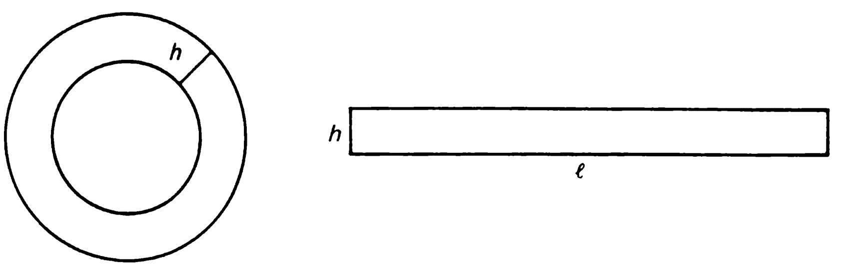
سرژلانگ. قبول کردید یا رودبایستی می‌کنید؟

کریستوفر. قبول کردم.

سرژلانگ. بسیار خوب، پس مساحت کمربند را به دست آوردیم. حالا فرض کنید مستطیلی داریم به این شکل

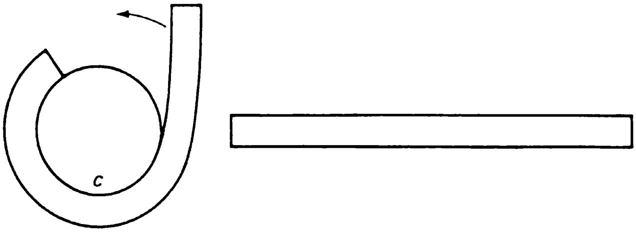


قاعدهٔ این مستطیل ℓ و ارتفاعش h است. مساحت این مستطیل چقدر است؟
[به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.]
شاگرد. ...
سرژلانگ. مساحت مستطیل مساوی است با؟
شاگرد. قاعده ضرب در ارتفاع.
سرژلانگ. درست است. می‌شود: ℓh . شما که این را می‌دانید؟
کریستوفر. بله می‌دانیم.
سرژلانگ. بسیار خوب. قصد من این است که برای مساحت کمربند، تعبیر دیگری پیدا کنم. می‌خواهم برای مساحت کمربند، نامساویهایی پیدا کنم. لحظه‌ای پیش، عبارت دقیقی برای مساحت به دست آوردم. حالا می‌خواهم، راه دیگری برای تعبیر مساحت کمربند پیدا کنم که تقریباً معادل طول ضرب در ارتفاع است.



در اینجا دو دایره داریم و هر کدام از آنها یک محیط دارند. محیط دایرهٔ بزرگ و محیط دایرهٔ کوچک. مساحت کمربند در نامساویهای خاصی صدق می‌کند. این مساحت بزرگتر است از محیط دایرهٔ کوچک ضرب در عرض. این عبارت را چه کسی فهمید؟ [سرژلانگ به چند شاگرد اشاره می‌کند] شما فهمیدید؟
شاگرد. بله، درست است.

سرژلانگ. مثل این شکل، کمربند را روی دایره می‌پیچم.



نامساوی

مساحت کمربند ≥ ارتفاع × (محیط دایرهٔ کوچک)

[بخوانید: محیط دایرهٔ کوچک ضرب در ارتفاع، کوچکتر یا مساوی مساحت کمربند است.]

یکی از شاگردان. دلیل این نامساوی را خوب نفهمیدم.

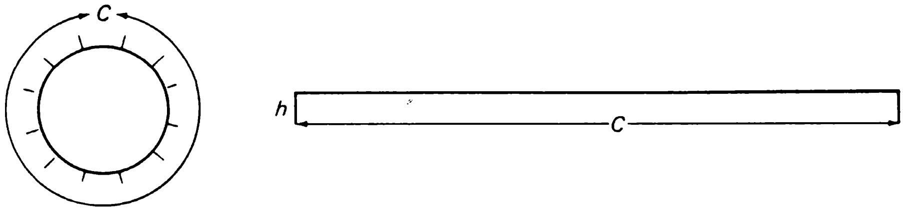
سرژلانگ. فرض کنید که طول مستطیل مساوی است با محیط دایرهٔ کوچک. اگر مستطیل را خم کنم و دور دایرهٔ کوچک بپیچم، مستطیل دقیقاً روی دایرهٔ کوچک می‌چسبد، ولی برای اینکه کاملاً روی دایرهٔ بزرگ منطبق شود باید آن را بکشم و چون ناچارم آن را بکشم پس مساحت مستطیل کوچکتر از کمربند است. فهمیدید؟

شاگرد. بله، متوجه شدم.

سرژلانگ. بسیار خوب. از طرف دیگر، این چه نوع نامساوی است که ما به آن دست یافتیم؟

یکی از شاگردان. [با مکث.] می‌خواهد بزرگتر شود از...ا... کوچکتر...

سرژلانگ. بله، شما مسیر درستی را انتخاب کردید. کمربندی دارم، دایرهٔ بزرگی دارم، و فاصلهٔ بین دو دایره را دارم که آن را h می‌نامم. مستطیلی اختیار می‌کنم که قاعده‌اش مساوی محیط دایرهٔ بزرگ است و ارتفاع آن h است. مستطیل را خم می‌کنم تا کمربند منحنی را به دست آورم. مساحت مستطیل چیزی نیست جز حاصل ضرب محیط دایرهٔ بزرگ در h. مساحت مستطیل بزرگتر از مساحت کمربند خمیده است، چون اگر مستطیل را طوری خم کنم که دقیقاً بر دایرهٔ بزرگ منطبق شود آنگاه در امتداد دایرهٔ کوچک چین می‌خورد.



متوجه شدید؟ پس می‌توانم این دو نامساوی را بنویسم:

$$h\,(\text{محیط دایرهٔ کوچک}) \leq \text{مساحت کمربند} \leq h\,(\text{محیط دایرهٔ بزرگ})$$

حالا، هر چیز را بر h تقسیم می‌کنیم. من عبارت سمت راست، عبارت وسط و عبارت سمت چپ رابر h تقسیم می‌کنم، چه چیزی به دست می‌آید؟

[سکوت پرسش برانگیز بر کلاس حاکم است.]

سرژلانگ. اگر بدانید که $a=b$، آیا می‌توانید نتیجه بگیرید که $ah=bh$؟

شاگردان. بله.

سرژلانگ. و برعکس، اگر $ah=bh$ و h صفر نباشد آنگاه چه؟

شاگردان. آنگاه $a=b$.

سرژلانگ. حالا، اگر $a\leq b$ آنگاه $ah\leq bh$ و اگر $ah\leq bh$ آنگاه ...؟ اگر h مثبت باشد؟

یکی از شاگردان. $a\leq b$.

سرژلانگ. درست است. اگر h مثبت باشد. بنابراین اگر چیزی کوچکتر از چیز دیگر داشته باشم و اگر هر دو چیز را بر h تقسیم کنم، باز هم همان نامساوی را خواهم داشت. در این صورت چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ وقتی که طرف چپ را بر h تقسیم می‌کنم محیط دایره به دست می‌آید. و هنگامی که عبارت وسط را بر h تقسیم می‌کنم، مساحت کمربند بر h تقسیم می‌شود، که چه می‌دهد؟ [به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.]

[شاگرد از پاسخ گفتن عاجز می‌ماند.]

سرژلانگ. مساحت کمر بند چیست؟ فرمول آن را چند لحظه پیش به دست آوردیم.

شاگرد. $\pi(2rh-h^2)$.

سرژلانگ. و اگر این عبارت را بر h تقسیم کنم؟

شاگرد. $2\pi r$.

سرژلانگ. بله، این از اولین جمله. و جملهٔ دوم؟

چند شاگرد باهم. πh.

سرژلانگ. آفرین. پس شد $2\pi r-\pi h$. و حالا طرف راست، چه حاصل می‌شود؟

شاگردان. محیط دایره بزرگ.

سرژلانگ. درست است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\text{محیط دایره کوچک} \leq 2\pi r+\pi h \leq \text{محیط دایرهٔ بزرگ}$$

ولی هدف ما یافتن فرمولی برای محیط است. فرض کنید h را کوچکتر و کوچکتر

اختیار کنیم.چه روی می‌دهد؟

یکی از شاگردان. نتیجه یکسان است.

سرژلانگ. نتیجه یکسان است، بله. به عبارت دیگر، محیط دایرهٔ بزرگ به محیط دایرهٔ کوچک میل می‌کند. بنابراین اگر h به صفر میل کند، چه اتفاقی می‌افتد؟ محیط دایرهٔ کوچک بدون تغییر ثابت باقی می‌ماند. عبارت وسط $2\pi r+\pi h$ است. پس $2\pi r$ تغییر نمی‌کند. به h بستگی ندارد و اما πh، برای πh وقتی که h کوچکتر و کوچکتر می‌شود، چه رخ می‌دهد؟

یکی از شاگردان. چیز دیگری می‌شود.

سرژلانگ. چیز دیگری می‌شود، بسیار خوب ولی چطور؟ π تقریباً برابر است با ۳/۱۴. اگر $h=\frac{1}{10}$ در این صورت πh تقریباً چقدر می‌شود؟

کریستوفر. ۰/۳۱۴

سرژلانگ. و اگر $h=\frac{1}{100}$؟

چند شاگرد. ۰/۰۳۱۴.

سرژلانگ. و اگر $h=\frac{1}{100}$؟

شاگردان. ۰/۰۰۳۱۴.

سرژلانگ. و حالا، اگر h کوچکتر و کوچکتر شود چه برسر πh می‌آید؟

شاگردان. کوچکتر و کوچکتر می‌شود.

سرژلانگ. درست است، و بنابراین به صفر میل می‌کند. و در نتیجه $2\pi r+\pi h$ به چه چیزی میل می‌کند؟

شاگردان. به محیط دایرهٔ کوچک.

سرژلانگ. درست است، $2\pi r+\pi h$ به محیط دایرهٔ کوچک میل می‌کند ولی وقتی که h به صفر میل می‌کند، در این حالت، $2\pi r$ به علاوه عددی خواهیم داشت که کوچکتر و کوچکتر می‌شود:

اگر $h=\frac{1}{10}$ آنگاه داریم $2\pi r+0/314$؛

اگر $h=\frac{1}{100}$ آنگاه داریم $2\pi+0/0314$؛

پس از آن، $2\pi r+0/00314$ را به دست می‌آوریم؛ و بعد، $2\pi r+0/000314$، حاصل می‌شود. و اگر همینطور ادامه بدهم، وقتی که h کوچکتر و کوچکتر می‌شود، حاصل جمع به چه چیزی میل می‌کند؟

یکی از شاگردان. به $2\pi r$ نزدیک می‌شود.

سرژلانگ. بله. و حالا طرف راست، محیط دایرهٔ بزرگ را در اختیار داریم. وقتی که h به صفر میل کند، محیط دایرهٔ بزرگ به چه چیزی میل می‌کند؟ همین حالا گفتید.

شاگردان. [با هم] به محیط دایرهٔ کوچک.

سرژلانگ. آفرین. بنابراین وقتی‌که h، به صفر میل کند، از هر طرف به محیط دایرهٔ کوچک می‌رسیم، در طرف راست و چپ، در وسط هم $2\pi r$ را داریم. این یعنی این که $2\pi r$ بین این دو عدد فشرده می‌شود: یکی محیط دایرهٔ کوچک c و دیگری محیط دایرهٔ بزرگ C. وقتی که عرض h به صفر میل کند آنگاه C به c میل می‌کند و چون $2\pi r$ را بین این دو می‌فشاریم،

$$C = 2\pi r،$$

حاصل می‌شود.

واین دقیقاً همان چیزی است که به دنبال آن بودیم.

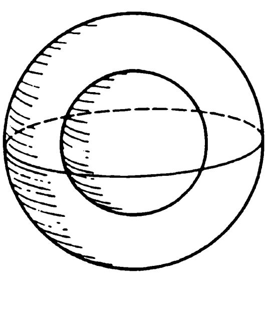
فراموش نکنید که ما از مساحت قرص شروع کردیم و دستور محیط دایره را به دست آوردیم. حالا اگر ۳ بعد را در نظر بگیریم دیگر به هیچ وجه قرص نخواهد بود، بلکه چه چیزی خواهد شد؟

یکی از شاگردان. کره

سرژلانگ. بله، درست است. می‌توان کره‌ای رسم کرد. و کره‌ای دیگر که اندکی بزرگتر باشد. حالا وقت آن را ندارم، ولی فرض کنید که حجم کره را می‌دانیم. برای پیدا کردن مساحت سطح کره چه باید کرد؟ کریستوفر، تو می‌دانی؟

کریستوفر. ...

سرژلانگ. برای دایره چه کردیم. به خاطر می‌آوری؟



کریستوفر. نه.

سرژلانگ. همین حالا بود. برهان را دوباره به سرعت مرور می‌کنیم. از مساحت قرص

شروع کردیم و مساحت کمربند را به دست آوردیم. این کار را چگونه کردیم؟ [اشاره می‌کند] شما، اسمتان چیست؟

شاگرد. روجر.

سرژلانگ. خوب، روجر، مساحت کمربند را چگونه حساب کردیم؟

روجر. دو محیط را از هم کم کردیم.

سرژلانگ. خوب، و بعد، نامساوی‌هایی برای مساحت کمربند نوشتیم. شما، اسمتان چیست؟

شاگرد. یائل.

سرژلانگ. بعد چه کردیم، یائل

یائل. گفتیم که مساحت کمربند از حاصل ضرب محیط دایرهٔ کوچک در h بزرگتر است.

سرژلانگ. و بعد، چه کردیم؟

یائل. همین کار را هم با محیط دایرهٔ بزرگ کردیم.

سرژلانگ. بله و بعد؟

یائل. h را حذف کردیم، بر h تقسیم کردیم.

سرژلانگ. درست است. حالا وقتی h کوچکتر و کوچکتر می‌شود، محیط دایرهٔ کوچک، هر چه هست بدون تغییر می‌ماند. ولی محیط دایرهٔ بزرگ؟

یائل. به محیط دایرهٔ کوچک میل می‌کند.

سرژلانگ. حالا می‌دانید که بر سر عبارت وسطی، یعنی مساحت کمربند چه آمد. قبل از آن، هنوز یک کار دیگر داشتیم. روجر؟

روجر. مساحت قرص کوچک را از مساحت قرص بزرگ کم کردیم.

سرژلانگ. درست است. که $\pi(r+h)^۲-\pi r^۲$ بود. بعد از آن چه کردیم؟

روجر. از یک اتحاد استفاده کردیم.

سرژلانگ. بله، چه چیزی به دست آوردیم؟

روجر. $۲\pi rh-\pi h^۲$

سرژلانگ. آفرین. و یائل گفت که هر چیز را بر h تقسیم کردیم. و بعد چه به دست آوردیم؟

روجر. $۲\pi r+\pi h$.

سرژلانگ. حالا، فرض کنید که h کوچکتر و کوچکتر می‌شود برای πh چه روی می‌دهد؟ از شاگرد دیگری بپرسم. شما! [به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.]

شاگرد. کوچکتر و کوچکتر می‌شود.

سرژلانگ. درست است.

وقتی که h به صفر میل می‌کند، πh نیز به صفر میل می‌کند.

و اما محیط دایرهٔ بزرگ...؟

شاگرد. به محیط دایرهٔ کوچک میل می‌کند.

سرژلانگ. درست است، محیط دایرهٔ بزرگ به c یعنی محیط دایرهٔ کوچک میل می‌کند بنابراین، داریم:

$$c \leq 2\pi r \leq c$$

و این یعنی، $C = 2\pi r$. برهان تمام است.

بسیار خوب، چه کسی می‌تواند برهان را به طور کامل تکرار کند؟

[در این لحظه، سرژلانگ از شاگرد دیگری می‌خواهد برهان را تکرار کند، شاگرد در حین اثبات هنوز نیازمند راهنمایی بود.]

بسیار خوب، امروز کافی است. این بحث را فعلاً تا همین جا خاتمه می‌دهیم. دربارهٔ چیز دیگری صحبت کنیم.

یکی از شاگردان. پیچیده است.

سرژلانگ. خیلی سخت بود؟ باید یک بار دیگر آن را مرور کنیم.

کلاس. [همه با هم.] نه.

سرژلانگ. نه، امروز نه.

یکی از شاگردان. آخر ما با این نوع مطالب عادت نکردیم.

سرژلانگ. آه، خیلی هم سخت نیست. فقط به بسط $(r+h)^2$ احتیاج داریم. اینقدر هم که می‌گویید پیچیده نیست.

شاگرد. نه

[شاگردان به هم جروبحث می‌کنند]

سرژلانگ. شما چیزی را هم اثبات می‌کنید؟

شاگرد. نه مثل این یکی.

سرژلانگ. می‌خواهید راجع به مطلب دیگری صحبت کنیم؟

یکی از شاگردان. شغلتان چیست؟

سرژلانگ. من استاد ریاضیات هستم.

شاگرد. و فیزیک؟

سرژلانگ. نه، فقط ریاضیات، در دانشگاه درس می‌دهم. فیزیک زیاد بلد نیستم. تحقیق هم می‌کنم.

یکی از شاگردان. [ناباورانه.] تحقیق در ریاضیات؟

سرژلانگ. قضیه‌ای که همین الآن ثابت کردیم، یک کسی باید آن را برای اولین بار ثابت می‌کرد.

یکی از شاگردان. آه، بله.

سرژلانگ. این خیلی پیش اتفاق افتاده، ولی خیلی چیزها هست که هنوز کشف نشده است.

یائل. وشما آنها را کشف می‌کنید؟

سرژلانگ. بله.

یکی دیگر از شاگردان. و اگر چیزی پیدا نکردید چه می‌شود؟[خنده.]

چند شاگرد. کناره گیری می‌کند! [خنده.]

سرژلانگ. اگر چیزی پیدا نکنم؟ بله، ممکن است این طور شود، ولی اگر چیزی پیدا نکردم. اصلاً هیچ چیز، در این صورت محقق ریاضیات نمی‌بودم. این رشته را انتخاب نمی‌کردم، کار دیگری را پیشه می‌کردم.

یکی از شاگردان. شما قضیه کشف می‌کنید؟

سرژلانگ. بله، چندتایی.

شاگرد. چه نوع قضایایی؟

سرژلانگ. اوه آخر می‌دانید، آنها در سطحی نیستند که بتوانم آنها را برای شما توضیح دهم. احتیاج به مقدمات زیادی دارد.

شاگرد. در سال ۲۰۰۰ مردم از آنها سر در می‌آورند؟

سرژلانگ. در دبیرستان؟ شاید، ولی کسانی هستند که الآن آنها را می‌فهمند.

[بحث ادامه پیدا کرد، و بسیاری از مطالب را فرا گرفت. پیرامون «دالاس»[1] نیز که بچه‌های فرانسوی هم مانند بچه‌های امریکایی آن را تماشا می‌کنند، گفتگو شد. یکی از بچه‌ها گفت که معلمش «دالاس» را «کودن» می‌نامد. کسی معترض این حرف نشد ولی آنها آن را تماشا می‌کنند. شاگردان دربارهٔ فرهنگ امریکایی و تأثیر آن بر فرهنگ فرانسوی و مسائل اقتصادی که کشورشان با آن مواجه است، صحبت کردند. به طور کلی، تلویزیون نفوذ چشمگیری برافکار بچه‌ها دارد و باعث

۱ـ شخصیت یک سریال تلویزیونی

شده است که از مسائل روز مطلع شوند. پس از حدود یک ساعت، فکر کردم که باید مسیر بحث را عوض کرد و صحبت از ریاضیات کرد. به همین دلیل، در میان غوغای کلاس، زمام امور را به دست گرفتم.]

چند شاگرد. نه، دوباره شروع نکنید!

سرژلانگ. برگردیم به برهان.[به یائل اشاره می‌کند.] تو! از مساحت قرص، πr^2 شروع کردم و خواستم که به $2\pi r$ یعنی محیط دایره برسم. بگو چه کردیم.

[قیل و قالها به محض اینکه یائل شروع به صحبت کرد متوقف شد. همهٔ شاگردان آرام گرفتند و به دقت به صحبتهای یائل گوش دادند.]

یائل. خوب، شما مساحت دایرهٔ بزرگ را که شعاعش $r+h$ است. حساب کردید، و مساحت دایرهٔ کوچک با شعاع r را از آن کم کردید.

سرژلانگ. [با لحن تشویق کننده‌ای] بله.

یائل. و پس از اینکه عمل ضرب را انجام دادید، $2\pi rh+\pi h^2$ را به دست آوردید و بعد چند نامساوی برقرار کردید و عبارتها را بر h تقسیم کردید...

سرژلانگ. دست نگهدار! کدام نامساویها؟

یائل. مساحت کمربند از حاصل‌ضرب محیط دایرهٔ کوچک در h بزرگتر و از حاصل ضرب محیط دایرهٔ بزرگ در h کوچکتر است.

سرژلانگ. حالا شد.

یائل. بعد، با تقسیم مساحت کمربند بر h، دو h را حذف کردید. چون وقتی که میل می‌کند به ...اِ ... الآن می‌گویم. می‌شود $2\pi r$.

[شک می‌کند.]

سرژلانگ. بله، درست می‌گویید. در وسط، $2\pi r+\pi h^2$ به دست آوردید. و اما در دو طرف نامساویها؟

یائل. طرف چپ، محیط دایرهٔ کوچک طرف راست محیط دایرهٔ بزرگ است. دیدیم وقتی که h کوچکتر و کوچکتر می‌شود. به c میل می‌کند و نتیجه گرفتیم که c از $2\pi r$ کوچکتر است و همچنین $2\pi r$ از c کوچکتر بود در نتیجه 2π مساوی c است.

سرژلانگ. [از کار شاگرد به وجد می‌آید ـ شاگردان نیز خوشحال می‌شوند.] درست است! آفرین. شما مطلب را یادگرفتید.

[همهٔ شاگردان کلاس با حرارت برای یائل دست می‌زنند.]

سرژلانگ. واقعاً عالی است. از اینکه به کلاس شما آمدم و با شما صحبت کردم از صمیم قلب خوشحالم. به من که خیلی خوش گذشت ... خیلی عالی بود.

ملاحظات

مخاطبین من، شاگردان واقعاً کم سن وسالی بودند (کلاس هشتم). چندی بعد همین درس را برای شاگردان کلاس دهم ایراد کردم. بسیاری از مشکلاتی که با شاگردان کم سن و سال داشتم هنگام تدریس به این گروه پیشرفته‌تر پدید نیامد (متأسفانه این جلسه ضبط نشد). در هر دو مورد، در پایان جلسه، از شاگردی خواستم که برهان را تکرار کند، در هر دو کلاس کار تکرار برهان با موفقیت انجام گرفت و شاگردان دیگر بی‌درنگ دست زدند. این نشان می‌دهد که شاگردان تا چه اندازه مشتاق یادگیری و درک ریاضیات هستند.

از دیدگاه فنی‌تر، در اینجا می‌بینیم که چگونه می‌توان در یک زمینهٔ فکری، ملاحظات فنی (از قبیل اتحاد $(a+b)^۲$) را گنجاند. با طرح مسئله‌ای که مورد علاقهٔ شاگردان است (یافتن محیط دایره)، به مسئله‌ای فنی برخورد می‌کنیم که باید ضمن مسیر بحث آن را حل کنیم. ما اثبات کلی را که مبتنی بر نظرات عمومی است با چنین موضوع فنی در هم می‌آمیزیم و با تکرار اتحاد $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ با صدای بلند، آن را حفظ می‌کنیم. اتحاد را باید به صورت بازتاب شرطی آموخت و شاگردان باید بتوانند آن را بدون مکث بیان کنند. این امر باید توانایی بازگویی قضیهٔ اصلی را تکمیل کند.

مساحت سطح کره

زمان کلاس قبل یک ساعت بیش نبود، به همین دلیل فقط توانستم دستور محیط دایره را برای شاگردان اثبات کنم، به استفان برت (۱۴ ساله) که از مدرسهٔ دیگری به آن کلاس آمده بود، بلافاصله پس از پایان کلاس دربارهٔ مساحت سطح کره و با همان شیوه قبلی به گفتگو نشستم.

سرژلانگ. [خطاب به استفان] پس گفتی که شاگرد این مدرسه نیستی و امروز مخصوصاً برای حضور در این کلاس به این مدرسه آمده‌ای. اثباتی را که ارائه دادم متوجه شدی؟

استفان. بله.

سرژلانگ. می‌توانی از همین روش برای اثبات دستور مساحت سطح کره استفاده کنی؟ دستور حجم کره را من برایت معلوم می‌کنم:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^{3}$$

مساحت کره به شعاع r چقدر است؟

استفان. من فرمول آن را فراموش کردم

سرژلانگ. فرمول $A=4\pi r^{2}$ است.

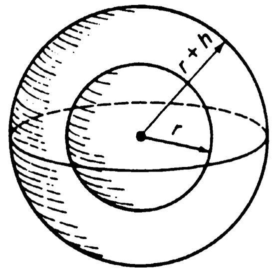
خوب، دیگر فراموش نمی‌کنی، آن را تکرار می‌کنیم [فرمول را با صدای بلند تکرار می‌کنیم: مساحت سطح کره $4\pi r^{2}$ است. مساحت سطح کره $4\pi r^{2}$ است...]

باز هم فراموشش می‌کنی؟

استفان. نه

سرژلانگ. آفرین. حالا پای تخته سیاه و فرمول را ثابت کن.

[استفان کنار تخته سیاه می‌رود و شکل زیر را می‌کشد.]



سرژلانگ. درست است، دو کره در نظر می‌گیری، شعاع یکی از آنها r و شعاع کره دیگر r+h است که کمی از کره اولی بزرگتر است. و بعد؟

استفان. و بعد شما از نامساویها استفاده کردید [استفان می‌نویسد:]

$(\text{مساحت کرهٔ کوچک}) \times h \leq \text{حجم کمربند} \leq (\text{مساحت کرهٔ بزرگ}) \times h.$

سرژلانگ. بله، بین دو کره کمربندی داری، ولی این نامساویها بین دو دایره برقرار بود و حالا از فضای ۳ بعدی صحبت می‌کنیم. حجم کمربند چقدر است؟

استفان. حجم کره بزرگ منهای حجم کرهٔ کوچک است.

سرژلانگ. بسیار خوب، آنها را بنویس. [استفان می‌نویسد.]

$$\text{حجم کمربند} = \text{حجم کرهٔ بزرگ} - \text{حجم کرهٔ کوچک}$$

$$= \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

سرژلانگ. حالا روشن شد، ولی ببین به جای $(r+h)^2$ و r^2 برای دایره‌ها، در اینجا $(r+h)^3$ و r^3 را داریم. باید اتحاد $(r+h)^3$ را بسط دهیم. این اتحاد را بلدی؟

استفن. نه، این اتحاد را هنوز نخوانده‌ایم.

سرژلانگ. اهمیت ندارد. جواب را می‌گویم و تو می‌توانی از آن استفاده کنی. بعداً این اتحاد را هم اثبات می‌کنیم. این اتحاد از این قرار است:

$$(r+h)^3 = r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3$$

حالا منها کن. نتیجه چه می‌شود؟

استفان. [روی تخته سیاه می‌نویسد:]

$$\frac{4}{3}\pi(r^3+3r^2h+3rh^2+h^3) - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi 3r^2h + \frac{4}{3}\pi 3rh^2 + \frac{4}{3}\pi h^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

سرژلانگ. خیلی خوب است. و بعد چه باید کرد؟
استفان. باید عبارت را ساده کنیم.
سرژلانگ. بسیار خوب، ساده کن.
استفان. $\frac{4}{3}\pi r^3$ را می‌توان ساده کرد. بعد داریم:

$$4\pi r^2 h + 4\pi r h^2 + \frac{4}{3}\pi h^3$$

سرژلانگ. و بعد؟
استفان. خوب، بعد، همه چیز را بر h تقسیم می‌کنیم.
سرژلانگ. پس ادامه بده، بر h تقسیم کن، به چه نتیجه‌ای می‌رسی؟
استفان. [می‌نویسد:]

مساحت کرهٔ بزرگ $\leq 4\pi r^2 + 4\pi r h + \frac{4}{3}\pi h^2 \leq$ مساحت کره کوچک

سرژلانگ. و حالا، چه باید کرد؟
استفان. کرهٔ بزرگ به کرهٔ کوچک میل می‌کند و مساحت کرهٔ بزرگ به مساحت کرهٔ کوچک میل می‌کند.
سرژلانگ. دقیقاً. عبارت میانی بین دو عبارت سمت راست و چپ فشرده می‌شود. برسر عبارت وسطی چه اتفاقی می‌افتد؟ مثلاً وقتی که h کوچکتر و کوچکتر می‌شود، جمله $4\pi r h$ به چه چیزی میل می‌کند؟
استفان. به صفر میل می‌کند.
سرژلانگ. بله، و عبارت دیگر هم یعنی $\frac{4}{3}\pi h^2$ نیز به صفر میل می‌کند. پس وقتی که h به صفر میل می‌کند، عبارت وسطی به چه چیزی میل می‌کند؟
استفان. $4\pi r^2$ میل می‌کند.
سرژلانگ. می‌بینید؟ بنابراین اگر مساحت کره به شعاع r، A باشد در این صورت داریم

$$A \leq 4\pi r^2 \leq A$$

و در نتیجه به این تساوی می‌رسیم:

$$A = 4\pi r^2$$

استفان. این همان چیزی است که دنبال اثبات آن بودیم.

سرژلانگ. خودت گفتی، این همان چیزی است که می‌خواستیم آن را ثابت کنیم. می‌بینید که اثبات به همان سادگی اثبات فرمول محیط دایره است.

فقط این می‌ماند که دربارهٔ اتحاد کوچک $(r+h)^3$ بحث کنیم. چه برخوردی با آن بکنیم؟

استفان. ضرب کنیم.

سرژلانگ. بله، این طور ضرب می‌کنیم [سرژلانگ روی تخته سیاه می‌نویسد:]

$$
\begin{aligned}
(r+h)^3 &= (r+h)(r+h)^2 = (r+h)(r^2+2rh+h^2)\\
&= r(r^2+2rh+h^2)+h(r^2+2rh+h^2)\\
&= r^3+2r^2h+rh^2+hr^2+2rh^2+h^3\\
&= r^3+3r^2h+3rh^2+h^3.
\end{aligned}
$$

این اتحاد را هم ثابت کردیم. حالا که اثبات این فرمول را فهمیدی، خوب است آن را مانند اتحاد $(a+b)$، حفظ کنی. اتحادهایی شبیه این اتحادها مانند $(r+h)^4$ و $(r+h)^5$ و الی آخر نیز داریم، که البته اندکی پیچیده‌ترند. می‌توانی بسط این اتحادهای دارای توان بالاتر را بیازمایی و ببینی چه پیش می‌آید. ببین می‌توانی قاعده کلی را پیدا کنی. ولی برای امروز دیگر کافی است. می‌توانی یک وقت دیگر این کار را بکنی.

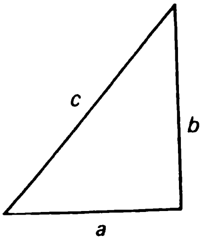
سه‌گانه‌های فیثاغورس

با شاگردان کلاس یازدهم دبیرستانی در حومهٔ تورنتو در بهار ۱۹۸۲، دو گفتگو ایراد شد که این اولین آنها است. شاگردان تقریباً ۱۶ ساله بودند. گفتگو حدوداً ۵۰ دقیقه طول کشید.

سرژلانگ. این کلاس چندم است؟ کلاس یازدهم؟ [شاگردان با حرکت سر تأیید می‌کنند.] چه درسی دارید؟ جبر؟

یکی از شاگردان. هیچی. [خنده. عدهٔ زیادی از شاگردان بلافاصله با همدیگر صحبت می‌کنند.]

سرژلانگ. خوب، بالاخره باید درسی داشته باشید. [خنده.] صحبتی که برای شما دارم عمدتاً راجع به جبر است ولی با مسئله‌ای که نغمهٔ هندسه از آن برمی‌آید، کار را شروع می‌کنم. این مسئله از زمان اقلیدس سابقه دارد. مثلث قائم الزاویه‌ای را فرض کنید که اضلاع آن a و b و c باشند:



شما قضیهٔ فیثاغورس را خوانده‌اید؟

یکی از شاگردان. بله.

سرژلانگ. قضیهٔ فیثاغورس چیست؟

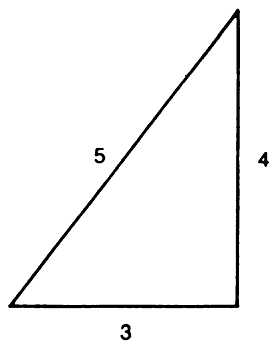
یکی از شاگردان. $a^۲+b^۲=c^۲$

سرژلانگ. درست است. حالا می‌توانید مثلث قائم‌الزاویه‌ای را مثال بیاورید که اضلاع a و b و c آن، عدد صحیح باشند؟ به چه عددی، عدد صحیح می‌گویند؟

[شاگردان جواب می‌دهند پاسخ یکی از آنها مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است:]

یکی از شاگردان. ۳ و ۴ و ۵

سرژلانگ. بله، چون $۵^۲=۴^۲+۳^۲$ یا $۲۵=۱۶+۹$



مثال دیگری می‌توانید بیاورید؟

یکی از شاگردان. ۶ و ۸ و ۱۰ [خنده]

سرژلانگ. حرف نامعقولی نیست. ۶ و ۸ و ۱۰ نمونه دیگری است. چگونه این اعداد را به‌دست آوردی؟

شاگرد. ۳ و ۴ و ۵ را در ۲ ضرب کردم.

سرژلانگ. درست است. ولی می‌توانستی آنها را در ۳ هم ضرب کنی، این طور نیست؟ می‌توانی آنها را هر عدد صحیحی ضرب کنی. مثلاً اگر d عدد صحیحی باشد. در این صورت:

$$(۳d)^۲+(۴d)^۲=۳^۲d^۲+۴^۲d^۲=(۳^۲+۴^۲)d^۲=۵^۲d^۲=(۵d)^۲$$

ولی می‌توانید مثالی بیاورید که از ضرب کردن ۳ و ۴ و ۵ و در یک عدد صحیح حاصل نشده باشد؟ شما، اسمتان چیست؟

شاگرد. چارلز.

سرژلانگ. خوب، چارلز. مثالی با a و b و c بیاور به طوری که مضربی از ۳ و ۴ و ۵ نباشد. چنین چیزی هست؟

[سکوت طولانی، یکی از شاگردان می‌گوید: باید تقسیم کرد.]

سرژلانگ. اگر تقسیم کنیم، باز هم عدد صحیح به دست می‌آید؟

شاگرد. نه.

سرژلانگ. ولی من عدد صحیح می‌خواهم.

یکی دیگر از شاگردان. ۵ و ۱۲ و ۱۳.

سرژلانگ. بگذارید ببینیم، ۲۵ = $۵^۲$، ۱۴۴ = $۱۲^۲$ و ۱۶۹ = ۱۴۴ + ۲۵ که برابر است با $۱۳^۲$. صدق می‌کند. بسیار خوب می‌توانید مثال دیگری بیاورید؟

[سکوت.]

خوب فکر کنید. ببینید نمونهٔ دیگری هم وجود دارد؟

یکی از شاگردان. ۱۰ و ۲۴ و ۲۶.

سرژلانگ. بله، ولی این‌ها مضرب ۵ و ۱۲ و ۱۳ هستند. تو اینها را در ۲ ضرب کردی. همانطور که می‌بینید، وقتی یک جواب داشته باشید، هر مضربی از آن جواب دیگری خواهد بود. سعی کنید موردی پیدا کنید که مضرب مثالهایی که تا حالا گفتیم نباشد. من مضرب نمی‌خواهم.

یکی از شاگردان. ۷ و ۲۴ و ۲۵

سرژلانگ. بگذارید ببینیم. ظاهراً درست است. راستی از چه راهی آن را پیدا کردی؟

شاگرد. [جواب شاگرد در نوار نامفهوم است.]

سرژلانگ. خوب، معلوم است که سریع محاسبه می‌کنید. خیلی خوب است. ببینیم درست است یا نه. یک نفر سریعاً این نمونه را امتحان کند.

چند شاگرد. درست است.

سرژلانگ. می‌توانید مثال دیگری بیاورید؟ [سکوت.] منظورم، ببینید می‌توانید یکی یکی حساب کنید مثل آن یکی ...

یکی از شاگردان. من می‌توانم.

سرژلانگ. یک لحظه صبر کنید. فرض می‌کنیم که می‌توانید این محاسبه را انجام دهید، که حتماً می‌توانید. سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا می‌توان این کار را تا بی‌نهایت ادامه داد؟ [سکوت.] سؤال را فهمیدید؟

شاگردان. بله

سرژلانگ. ببینم چند نفر می‌گویند بله، بی‌نهایت مثال می‌توان آورد، آیا می‌توانید بی‌نهایت مثال طوری بیاورید که از ضرب یکی از مثالها در عدد صحیحی به دست نیامده باشد؟ چند نفر جواب مثبت می‌دهند؟

[چند دست بالا می‌رود.]
چند نفر پاسخ منفی می‌دهند؟
[مکث طولانی، چند دست بالا می‌رود.]
چند نفر نمی‌دانند؟ چند نفر سکوت احتیاط آمیز را ترجیح می‌دهند؟ [خنده.]
سرژلانگ. [به شاگردانی اشاره می‌کند.] تو چه نظری داری؟
شاگرد. بی‌نهایت زیاد.
سرژلانگ. به چه دلیل؟
شاگرد. از مثالهایی که گفته شد.
سرژلانگ. آه نه، این دلیل نمی‌شود. شما سه مثال گفتید.
شاگرد. نمی‌دانم.
یکی دیگر از شاگردان. بی‌نهایت مجذور می‌توان یافت. تا ابد ادامه دارد.
سرژلانگ. بله، مجذورها تا ابد ادامه دارند. بی‌نهایت مجذور وجود دارد. ولی مجذورهایی می‌خواهم که در این رابطه صدق کند. مسئله این است. آیا این مجذورها هم تا ابد ادامه دارد؟
شاگرد. بله، برای اینکه ا... اولی ۳ و ۴ و ۵ بود. بعد ۵ و ۱۲ و ۱۳ را داشتیم و بعد ۷ و ۲۴ و ۲۵. اعداد اول این سه مثال: ۳ و ۵ و ۷ است. پس بعدی ۹ می‌شود، ولی ممکن است ... مضرب ۳ را به دست می‌آوریم:
سرژلانگ. بله، ممکن است به مضرب ۳ منجر شود. و بعد چه؟ فکر می‌کنید می‌توان مثالی آورد که عدد ۱۱ در آن باشد؟
شاگرد. گمان نمی‌کنم.
سرژلانگ: خیلی خوب مغزت را به کار می‌اندازی.[1] درواقع، برای تعیین اینکه آیا بی‌نهایت مثال وجود دارد یا نه، باید همین کار را کرد. حالا می‌خواهم اولاً به شما نشان دهم که بی‌نهایت مثال می‌توان آورد و بعد همه این مثالها را، بی‌کم و کاست، برایتان شرح دهم. پس معلوم شد چه هدفی داریم. این مسئله برای چند نفر جالب است؟
[خنده.]

۱- بهتر می‌بود که بحث را با شاگرد ادامه می‌دادم تا مسیر درستی را که کشف کرده بود دنبال کند. باید دیگران را هم در این فعالیت شرکت می‌دادم و از آنها می‌خواستم که تا نوبت بعد راجع به این مسئله فکر کنند. مطلب را می‌بایست در جلسهٔ بعد، پس از آنکه شاگردان ابتکار خود را نشان می‌دادند، دنبال می‌کردم ولی برای من، که فقط همین یک ساعت با شاگردان بودم، چاره‌ای جز ادامهٔ بحث نبود.

سرژلانگ: چرامی‌خندید؟[خندهٔ بیشتر.] [تعدادی ازشاگردان می‌گویند که برایشان جالب است.]

سرژلانگ: کسی هست که برایش جالب نباشد؟ [خنده.] آهان، چند دست بالا آمد. برای بعضی جالب است و برای بعضی نه. خوب، پس برای آنهایی که جالب است می‌گویم. ایرادی که ندارد؟

بنابراین همهٔ جوابهای a و b و c را می‌خواهیم پیدا کنیم که در این رابطه صدق کند:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ \qquad (*)$$

اگر معادلهٔ (*)را بر $c^۲$تقسیم کنیم،نتیجه می‌شود:

$$(\frac{a}{c})^۲ + (\frac{b}{c})^۲ = ۱$$

درست است؟ حالا اگر a وc و همچنین b و c عدد صحیح باشند، $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ را چه می‌نامیم. می‌دانید این کسرها را چه می‌نامند؟

یکی از شاگردان. اعداد گویا.

سرژلانگ. بله، پس فرض می‌کنم که

$$x=\frac{a}{c} \text{ و } y=\frac{b}{c}$$

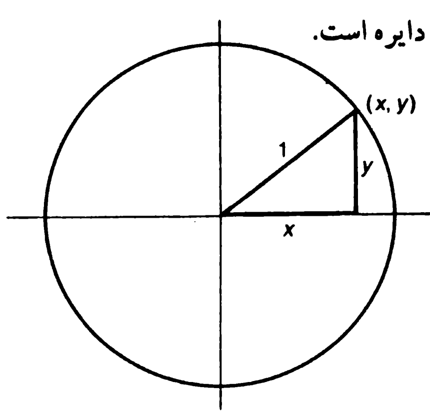
در این صورت x وy اعداد گویایی هستند. پس معادله ما می‌شود:

$$x^۲+y^۲=۱ \qquad (**)$$

معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$،معادلهٔ چه چیزی است؟

یکی از شاگردان. دایره

سرژلانگ. بله، معادلهٔ دایره است.



شعاع این دایره چقدر است؟

شاگرد. یک.

سرژلانگ: پس دایره‌ای به شعاع ۱ داریم که مرکز آن بر مبدأ مختصات منبطق است. نقطه (x و y) را دارم و می‌خواهم همهٔ نقاط گویای واقع بر دایره را پیدا کنم. به عبارت دیگر، همهٔ نقاط دارای مختصات x و y که اعداد گویا باشند و در معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ صدق کنند. اگر هر یک از این نقاط گویا راداشته باشیم، اگر اعداد گویای x و y را چنان داشته باشیم که $x^۲+y^۲=۱$، چگونه می‌توانیم جوابهای $a^۲+b^۲=c^۲$ را در حوزهٔ اعداد صحیح پیدا کنیم.

شاگرد نمی‌دانم

سرژلانگ: به چه عددی گویا می‌گویند؟

[سکوت.]

سرژلانگ: به کسر، به خارج قسمت دوعدد صحیح، عدد گویا می‌گویند، درست؟ فرض کنید دوکسر x و y را داشته باشیم به طوری که $x^۲+y^۲=۱$. چگونه می‌توان a و b و c را چنان یافت که $a^۲+b^۲=c^۲$؟ x و y را می‌توان به صورت کسرهایی با مخرج معینی نوشت. هر کسری را می‌شود طوری نوشت که صورت و مخرج داشته باشد.

فرض کنیم دوکسر x و y را داریم. می‌توانید این دو کسر را طوری بنویسید که مخرج مشترک داشته باشند. چه مخرجی؟ پس فرض کنیم که c مخرج مشترک باشد. در این صورت x را می‌توان کسری نوشت که c مخرج آن باشد و همچنین y کسری می‌شود که c مخرج آن است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$x=\frac{a}{c} \quad \text{و} \quad y=\frac{b}{c}$$

a و b اعداد صحیح هستند. مسئله‌ای نیست؟ اگر چنین کسرهایی داشته باشیم، بین a و b و c چه ارتباطی وجود دارد؟ اگر $x^۲+y^۲=۱$ آنگاه داریم:

$$(\frac{a}{c})^۲ + (\frac{b}{c})^۲ = ۱$$

این معادله را به این صورت نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{a^۲}{c^۲} + \frac{b^۲}{c^۲} = ۱$$

حالا برای به دست آوردن $a^۲+b^۲=c^۲$ چه باید کرد؟ [سرژلانگ به شاگردی اشاره می‌کند.]

اسمتان چیست؟

شاگرد. لورا.

سرژلانگ. لورا. این معادله را داری

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

اگر مخرجهای این معادله را از بین ببری چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

لورا. دقیقاً نمی‌دانم.

سرژلانگ. حذف مخرج یعنی چه؟

یکی دیگر از شاگردان. [شروع می‌کند به دادن جواب درست.]

سرژلانگ. بس است! ادامه نده! [خنده.] می‌دانم که می‌توانی جواب بدهی. من می‌خواستم از او بشنوم.

لورا. باید در c^2 ضرب کرد؟

سرژلانگ. درست است. در c^2 ضرب می‌کنیم. چه به دست می‌آید؟

لورا. می‌شود $a^2+b^2=c^2$

سرژلانگ. درست است $a^2+b^2=c^2$ به دست می‌آید.

اگر از $a^2+b^2=c^2$ شروع می‌کردیم به $x^2+y^2=1$ می‌رسیدیم. اگر a و b و c اعداد صحیح باشند، x و y اعداد گویا می‌شوند. اگر از اعداد گویا به صورت کسرهای x و y شروع کنیم و آنها را با مخرجهای مشترک در نظر بگیریم و مخرجها را حذف کنیم به $a^2+b^2=c^2$ می‌رسیم. بنابراین چه با معادلهٔ دارای اعدادگویایِ $x^2+y^2=1$ و چه با معادلهٔ دارای اعداد صحیح $a^2+b^2=c^2$ کار کنم فرقی نمی‌کند، هر دو یک مسئله هستند، درست است؟

بسیار خوب، معادلهٔ $x^2+y^2=1$ را ملاحظه کنیم. مسئلهٔ ما، یافتن جوابهای این معادله است. یافتن همهٔ اعداد گویای x و y به طوری که $x^2+y^2=1$. حالا باید این فکر را دنبال کرد که چگونه می‌توان این جوابها را پیدا کرد. می‌خواهم چند فرمول بنویسم. اگر با این ایده که چگونه می‌توان این جوابها را به دست آورد، مدت زیادی تفریح کنید. به این فرمولها خواهید رسید:

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{و} \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

این عبارتها را x و y فرض می‌کنیم. جواب؟ در این صورت x^2+y^2 چه می‌شود؟ جبر بلدی چارلز؟

چارلز. یک

سرژلانگ. بله، به چه دلیل؟ x را مجذور کن. x را که مجذور می‌کنی چه به دست می‌آید؟ به توان دو برسان، بنویس. مجذورِ صورت چه می‌شود؟

چارلز. $1-2t^2+t^4$

سرژلانگ. درست است. و حالا مجذور y را به آن اضافه کن.

چارلز. می‌شود:

$$\frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}+\frac{4t^2}{1+2t^2+t^4}$$

سرژلانگ. همین است عالی است. دقیقاً درست است. x و y هر دو یک مخرج دارند. چه نتیجه‌ای می‌گیری؟ چارلز.

چارلز. $1-2t^2+t^4+4t^2$ که می‌شود، $1+2t^2+t^4$

سرژلانگ. درست است، چارلز درست گفت چون $-2t^2+4t^2$ می‌شود $+2t^2$ بنابراین داریم:

$$x^2+y^2=\frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}$$

دراین کسر صورت و مخرج یکسان است. خوب چارلز بالاخره چه نتیجه‌ای می‌گیری؟

چارلز. می‌شود ۱.

سرژلانگ. درست است. معادلهٔ $x^2+y^2=1$ به دست می‌آید. حالا فرض کنید t مقادیر معینی را اختیار می‌کند. چند تا از این مقادیر را امتحان می‌کنیم. چند مثال می‌آوریم . یکی از شما مقداری برای t تعیین کند.

یکی از شاگردان: دو

سرژلانگ. بسیار خوب، $t=2$ را اختیار می‌کنیم. جواب چه می‌شود؟

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-2^2}{1+2^2}=\frac{-3}{5}$$

یکی از شاگردان. و

$$y=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{4}{5}.$$

سرژلانگ. بله، پس $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ اینها هستند. می‌توانیم $a=3$ و $b=4$ و $c=5$ اختیار کنیم و جوابهای ۳ و ۴ و ۵ را که قبلاً داشتیم به دست آوریم. برای t مقدار دیگری اختیار کنید.

یکی ار شاگردان. $t=3$.

سرژلانگ. بسیار خوب، مقدار خوبی است. حالا آن را به کار ببرید: چه به دست می‌آید؟

[شاگردان دیکته می‌کنند:]

$$x=\frac{۱-۳^{۲}}{۱+۳^{۲}}=\frac{-۸}{۱۰}$$

سرژلانگ. و y چه می‌شود؟

شاگرد. $y=\frac{۶}{۱۰}$

سرژلانگ. خوب. این یکی چنگی به دل نمی‌زند، خیلی جالب نیست چون مضربی از ۳ و ۴ و ۵ به‌دست می‌آید. برای t مقدار دیگری را در نظر بگیرید.

یکی ازشاگردان. هفت.

سرژلانگ. بسیار خوب، وقتی که $t=۷$ ، x چقدر می‌شود؟

شاگرد. $۱-۴۹=-۴۸$ و $۱+۴۹=۵۰$ پس $x=\frac{۴۸}{۵۰}$

سرژلانگ. و برای y چه جوابی به دست می‌آید؟

شاگرد. $y=\frac{۱۴}{۵۰}$

سرژلانگ. بله، و اگر آن را ساده کنید می‌شود؟

شاگرد. $\frac{۲۴}{۲۵}$ و $\frac{۷}{۲۵}$

سرژلانگ. بله،این یکی را هم قبلاً به دست آورده بودید. ۷ و ۲۴ و ۲۵، مثال دیگری را امتحان کنید.

شاگرد. $t=۱۱$

سرژلانگ. بسیار خوب،در این صورت می‌شود؟

شاگرد. $\frac{-۱۲۰}{۱۲۲}=\frac{۱-۱۲۱}{۱+۱۲۱}=x$ و $y=\frac{۲۲}{۱۲۲}$

سرژلانگ. خوب. و حالا اگر کسرها را ساده کنیم،به چه نتیجه‌ای می‌رسیم.

شاگرد. $-\frac{۶۰}{۶۱}$ و $\frac{۱۱}{۶۱}$

سرژلانگ.آها! این یکی بی‌سابقه است. ۱۱و۶۰و۶۱، باز هم می‌خواهید مقدار دیگری را اختیار کنید؟

شاگرد.۱۳.

سرژلانگ. خوب، حساب کنیم[سرژلانگ و شاگردان حساب می‌کنند.]

اگر $t=۱۳$ داریم،

$$x=\frac{-۱۶۸}{۱۷۰}=\frac{-۸۴}{۸۵} \quad \text{و} \quad y=\frac{۲۶}{۱۷۰}=\frac{۱۳}{۸۵}$$

این هم یکی دیگر، ۱۳ و ۸۴ و ۸۵. حالا معلوم شد که این روند بی‌وقفه ادامه دارد علاوه براین برای t فقط اعداد صحیح اختیار کردید. می‌توانستید از کسر هم استفاده کنید؟ با یک کسر چطورید؟

[شاگردان با تکان دادن سرتأیید می‌کنند.] بسیار خوب، یک کسر هم در فرمول قرار می‌دهیم. برای t یک مقدار کسری تعیین کنید.

یکی از شاگردان. $\frac{۱}{۲}$.

سرژلانگ. در این صورت x می‌شود؟

[شاگردی دیکته می‌کند.]

$$x=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۳}{۵} \quad \text{و} \quad y=\frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۴}{۵}$$

همه متوجه شدند![شاگردان تأیید می‌کنند.] پس داریم برمی‌گردیم به ۳ و ۴ و ۵.

[سرژلانگ و شاگردان یک کسر دیگررا هم مانند $\frac{۱}{۷}$ در فرمول قرار می‌دهند] پس معلوم شد که به جای t می‌توان هر کسری گذاشت و a و b و c را به دست آورد. با این روش، جوابهای زیادی به دست می‌آید. واضح است که با قرار دادن کسرها یا اعدادگویا به‌جای t بی‌نهایت جواب به دست می‌آید.

حالا نسبت به چند دقیقه پیش زیاد پیشرفت کردیم چون چند لحظه پیش؛ حتی اگر همهٔ نیروی فکری خود را به کار می‌بردید جوابها را یکی یکی با آزمایش به دست می‌آوردید. علاوه براین معلوم نبود که می‌توان بی‌نهایت جواب به دست آورد ولی حالا به این مرحله از پیشرفت رسیدیم که عملاً بتوانیم جوابهای بی‌شماری را بنویسیم. بسیار خوب، اسم این کار را «پارامتری کردن» بگذاریم: کلمهٔ پارامتری کردن را تا حالا شنیده‌اید؟ به t پارامتر می‌گویند. در عبارات مشخص، به‌جای t، مقادیری قرار می‌دهیم. عبارتها را نوشته‌ایم، مقادیر را جایگزین t می‌کنیم و جوابهای گویای $x^۲+y^۲=۱$ را به‌دست می‌آوریم.

و اما مسئله بعدی این است که آیا ما همهٔ جوابها را یافته‌ایم یا نه؟ به نظر شما، غیراز جوابهایی که تاکنون به دست آوردیم باز هم جواب وجود دارد؟ این سؤال باسؤالهای قبلی کاملاً فرق دارد. به نظر پیچیده می‌رسد. فکر می‌کنید ما می‌توانیم یک دسته جواب بنویسیم؟ غیر از این جوابها، جوابهای دیگری هم وجود دارد؟ آیا ما همهٔ جوابها را نوشته‌ایم؟ نظر خاصی دارید؟

یکی از شاگردان: نمی‌دانم. شاید چندتایی از نظرمان دور مانده است.

معلم کلاس: امکانش هست که جواب تکرار شود؟

سرژلانگ: بله، بعضی تکرار می‌شوند. قبلاً دیدیم که ۳ و ۴ و ۵ از دو مقدار به دست می‌آید. ولی مسئله فعلی ما این است که همهٔ جوابهای معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ را پیدا کنیم. مسئلهٔ تکرار جوابها را می‌توان به بعد موکول کرد. فعلاً می‌خواهم بدانم: آیا همهٔ جوابها را یافته‌ایم؟ شما چه فکر می‌کنید؟

یکی از شاگردان. گمان نمی‌کنم.

سرژلانگ. گمان نمی‌کنید همهٔ جوابها را پیدا کرده باشیم.

شاگرد. اعدادگویا را به کار می‌بریم؟

سرژلانگ. بله حتماً، از اعدادگویا استفاده می‌کنیم. با فرمولهای

$$y=\frac{۲t}{۱+t^۲} \quad \text{و} \quad x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

با قرار دادن اعدادگویا به‌جای t، آیا همهٔ اعدادگویای (x و y) که در معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ صدق بکنند، پیدا می‌کنیم؟ از کجا می‌دانیم که فرمول دیگری وجود ندارد که به موجب آن بتوان x و y را از راه دیگری به دست آورد؟

شاگرد. نمی‌دانم.

سرژلانگ. نمی‌دانی. خودت چه نظری داری؟

یکی از شاگردان. نمی‌دانم!

سرژلانگ. ولی متوجه شدی که سؤالم چه بود؟

شاگرد. بله.

سرژلانگ. [به شاگردی اشاره می‌کند] تو چه فکر می‌کنی؟

شاگرد. شاید فرمول دیگری هم باشد.

سرژلانگ. فکر می‌کنی فرمول دیگری هم ممکن است باشد، خوب، حالا جوابی می‌نویسم که قبلاً به دست نیاورده باشیم.

$$y=۰ \quad \text{و} \quad x=-۱$$

این یقیناً یکی از جوابها است. اگر $x=-۱$، $x^۲$ چقدر است؟

یکی از شاگردان. ۱.

سرژلانگ. اگر $y=۰$ ، $y^۲$ چقدر است؟

شاگرد. ۰

سرژلانگ. به صفر، یک اضافه کن جواب می‌شود یک. حالا من این حکم را بیان می‌کنم که از فرمولی که داریم هرگز $x=-1$ یا $y=0$ به‌دست نمی‌آید. چون اگر $y=0$، دراین صورت t چقدر می‌شود؟

شاگرد. صفر

سرژلانگ. بله، $t=0$ و اگر $t=0$ در این صورت x چقدر می‌شود؟

شاگرد. ۱.

سرژلانگ. پس x مساوی با ۱- نیست بنابراین امکان وجود ندارد که جوابهای $x=-1$ یا $y=0$ را به دست بیاوریم. پس حداقل یک جواب را از دست می‌دهیم. آیا باز هم جوابهایی هست که از دست بدهیم؟

شاگرد. وقتی که $x=0$

سرژلانگ. اگر $x=0$، t چقدر می‌شود؟

شاگرد. یا ۱ و یا ۱-

سرژلانگ. خوب،قبول می‌کنیم. فرض کنید $t=1$ یا $t=-1$. در این صورت $x=0$. و حالا این سؤال را مطرح می‌کنم: آیا غیر $x=-1$ و $y=0$ وجوابهایی‌که با فرمولها به دست می‌آوریم، باز هم جواب دیگری وجود دارد؟ چند نفر از این سؤال خوششان می‌آید؟ [خنده] چند نفر لعنت نمی‌کنند؟ [خندهٔ بلندتر]

یکی از شاگردان. به نظر شما x و y می‌توانند هر دو صفر باشند؟

سرژلانگ. نه، اگر هر دو صفر باشند، حاصل جمع آنها یک نمی‌شود.

شاگرد. آها. درست است.

سرژلانگ. x^2+y^2 باید یک شود. سؤال را یک بار دیگر تکرار می‌کنم. آیا همهٔ جوابها را به دست آورده‌ایم؟ [شاگردان به فکر فرو می‌روند.]

بسیار خوب، قضیه را بیان می‌کنم:

قضیه. بجز جواب $x=1$ و $y=0$، همهٔ جوابهای گویای معادلهٔ $x^2+y^2=1$ با قرار دادن مقادیر گویا در فرمولهای

$$y=\frac{2t}{1+t^2} \quad \text{و} \quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

به دست می‌آید.

فقط همین یک جواب را از دست داده‌ایم. بقیه جوابها را به دست آورده‌ایم. آیا می‌دانید

چگونه می‌توان این قضیه را اثبات کرد؟ اگر بتوانیم این قضیه را اثبات کنیم، در این صورت مسئلهٔ پیدا کردن جوابهای $x^۲+y^۲=۱$ در حوزهٔ اعداد گویا را، کاملاً حل کرده‌ایم. این اثبات، مسئله‌ای را که در اول جلسه مطرح کردم، به طور کلی حل می‌کند.

اثبات را شروع می‌کنم. فرض کنید جوابی داریم. می‌خواهم نشان دهم که عددگویایی برای t وجود دارد به طوری که:

$$x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲} \quad و \quad y=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

اگر برای چگونگی کشف مقدار t کوشش کنید، الگویی را که ـ اسم شما چیست؟

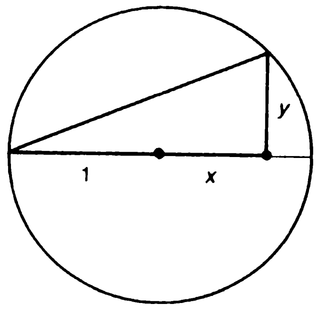
شاگرد. سلیم.

سرژلانگ. الگویی را که سلیم در اول بحث ارائه داد، خودتان کشف خواهید کرد. ولی البته من جوابها را به شما گفتم بنابراین می‌توانم قبل از پایان جلسه همهٔ برهان را برایتان بگویم.

وقت نکردیم الگوها را امتحان کنیم. باید امتحان می‌کردید، شاید در عرض دو روز راه آن را پیدا می‌کردید باید الگویی را که سلیم در اول جلسه سعی داشت پیدا کند، تنظیم و آزمایش کرد و پس از مدتی شاید به برهان دست می‌یافتید. حالا من برهان را می‌نویسم وبه شما نشان می‌دهم. این برهان یک «فرضیه» است. می‌دانید «فرضیه» یعنی چه؟ [خنده] «فرضیه» یعنی اینکه مغز به غلیان می‌آید و چیزی در ذهنتان خطور می‌کند و شما جواب را می‌نویسید و بعد ثابت می‌کنید که جواب همین است فرض کنید که

$$t=\frac{y}{x+۱}$$

حالا این یک فرضیه است و ممکن است درست یا نادرست باشد. پس چیزی را که می‌خواهم نشان دهم این است که اگر مطابق شکل، t مساوی با x بر $x+۱$ باشد



آنگاه با استفاده از فرمولها می‌توان x و y را به‌دست آورد. از این جا به بعد، موضوع جنبه محاسبهٔ جبری به خود می‌گیرد. اگر فرض کنیم که $t=\frac{y}{x+1}$ و x و y اعداد گویایی باشند، در این صورت t یک عدد گویا خواهد بود، درست؟ از جمع کسرها، کسر به دست می‌آید، اگر کسرها را در هم ضرب کنید، حاصل ضرب کسر می‌شود و خارج قسمت دو عدد گویا، عددی است گویا. بنابراین، t عددگویایی است. حالا می‌خواهم نشان دهم که

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ و } y=\frac{2t}{1+t^2}$$

به فرمول $t=\frac{y}{x+1}$ توجه کنید، اگر $x=-1$، مخرج بی‌معنی می‌شود. پس باید این مورد را نادیده گرفت. در غیر این صورت کسربی‌معنی می‌شود. الآن ایـن فـقط سؤال است - می‌دانید درست مثل کاری که در آشپزی انجام می‌گیرد، بگذارید کمی پخته شود، تا جا بیفتد. داریم:

$$(x+1)t=y$$

دوتساوی را مجذور می‌کنیم $(x+1)^2t^2=y^2$

y^2 برحسب x چقدراست؟ اگر $x^2+y^2=1$، در این صورت y^2 چقدر می‌شود؟

سلیم. $1-x^2$.

سرژلانگ. بله و $1-x^2$ را می‌توان به عوامل اول تجزیه کرد، چگونه؟

سلیم. $1+x$ در $1-x$.

سرژلانگ. بله، شما خوب کار می‌کنید. بچه‌های با هوشی هستید؟، خوب بر جبر تسلط دارید پس داریم: $(x+1)^2t^2=(1+x)(1-x)$

حالا باید خیلی مشتاق باشید که کاری بکنید، چه کاری؟ [به شاگردی اشاره می‌کند.] اسمتان چیست؟

شاگرد. اونو.

سرژلانگ. بسیار خوب اونو، حالا می‌خواهی چه کار کنی؟

اونو. دوطرف را باید بر $(x+1)^2$ تقسیم کرد.

سرژلانگ. نه، در طرف چپ $(x+1)^2$ را داریم ، طرف راست هم فقط $x+1$ است. پس باید تقسیم کنی بر...؟

اونو. $x+1$.

سرژلانگ. $x+۱$ درست است. بنابه گفته اونو بر $x+۱$ تقسیم می‌کنیم [خنده] من آدم حرف شنویی هستم. پس بر $x+۱$ تقسیم می‌کنم، نتیجه چه می‌شود؟

اونو. $(x+۱)t^۲=۱-x$

سرژلانگ. بله، و طرف چپ می‌شود $xt^۲+t^۲$ پس داریم: $xt^۲+t^۲=۱-x$

حالا شما x را به‌دست بیاورید. چقدر می‌شود؟ $x(۱+t^۲)=۱-t^۲$

و از آنجا

$$x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

پس

$$y=(x+۱)t$$

و باز هم با استفاده از جبر می‌توانید ببینید که $y=\frac{۲t}{۱+t^۲}$

که ما هم، همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

شاگرد. این برهان را چگونه به دست می‌آورید؟

سرژلانگ. ریاضی‌دان خوب،با دو روز تقلا، بالاخره می‌تواند «فرضیه» را پیدا کند،آن را می‌نویسد و جبر را آنقدر به جانش می‌اندازد تا ثابت کند که «فرضیه» درست است. فرق بین ریاضی‌دان خوب و کسی که فرضیه و برهان را پیدا نمی‌کند، همین است. بعضی از شما می‌توانید و بعضی نمی‌توانید حل را بیابید. تفاوت بین تحقیق ریاضی و عدم تحقیق آن در همین است پژوهشگران ریاضیدان به چنین کاری مبادرت می‌کنند. آنها همان کاری می‌کنند که سلیم کرد. آزمایش می‌کنند و پس از چندی، مطلوب را می‌یابند، و برهان را پیدا می‌کنند، این جواب سؤال شما است.

ملاحظات

وقت نکردم مطلب را بسط دهم. با تأکید برچند جنبه از تاریخ فرمولها و «فرضیه» ای را که کم و بیش بی‌مقدمه، وارد بحث کردم، سرانجام به بررسی تاریخچهٔ فرمولها پرداختم. جی. لاچود[۱] به من گفت که پس از گذشتن چندین قرن و بر اثر تلاش ریاضی‌دانان زیادی، این فرمولها به این صورت که در اینجا عرضه کردم، در آمدند. اقلیدس یا ریاضی‌دانان هم عصر او، در سه قرن پیش از میلاد، می‌دانستند که سه‌گانه‌های فیثاغورس a و b و c را با استفاده از این فرمولها، می‌توان به دست آورد:

۱ـ G.lachaud

$$a=m^۲-n^۲ \text{ و } b=۲mn \text{ و } c=m^۲+n^۲$$

m و n اعداد صحیح هستند. به مدد جبر این فرمولها را امتحان کنید. ببینید واقعاً نتیجهٔ $a^۲+b^۲=c^۲$ به دست می‌آید یا نه. در این صورت می‌توانید به جای m و n هر عددی از اعداد صحیح، قرار دهید و جواب را به دست آورید. ریاضیدانان در زمان اقلیدس کسرها را اکراه داشتند. و بیشتر ترجیح می‌دادند که با اعداد صحیح کار کنند. پس از گذشتن سالیان دراز، دیوفانتوس (سه قرن بعد از میلاد) به کسرها روی آورد و دانست که اگر فرمولهای بالا را بر $m^۲+n^۲$ تقسیم کند و $t=\frac{n}{m}$ قرار دهد، این فرمولها به دست خواهند آمد:

$$\frac{a}{c}=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲} \text{ و } \frac{b}{c}=\frac{۲t}{۱+t^۲}$$

با این حساب از اقلیدس تا دیوفانتوس (ریاضیدان یونانی که در اسکندریهٔ مصر به فعالیت مشغول بود) شش قرن طول کشید تا فرمولها به همان صورتی که در اول جلسه بیان کردم، درآمدند. فرمولهایی که بتوان به مدد آنها بی‌نهایت جواب گویا برای معادله $x^۲+y^۲=۱$ پیدا کرد.

این مسئله که آیا این فرمولها همه جوابهای موجود در اعداد گویا را تعیین می‌کنند یا خیر، خود دیوفانتوس مطرح نکرد. برای مطرح کردن این مسئله هم می‌بایست شش قرن دیگر صبر کرد. در قرون دهم و یازدهم، ریاضیدانان عرب [ی‌نویس] مانند خازن چنین سؤالی را پیش کشیدند و با استفاده از جبر به راه حلی دست یافتند که اساساً شبیه راه حلی که امروز ارائه دادیم بود. چون جبر در آن زمان تا حدودی در همان سطحی بود که بر دیوفانتوس معلوم بود، امروزه می‌توان گفت که اگر دیوفانتوس هم به این سؤال می‌پرداخت، از عهدهٔ حل آن برمی‌آمد.

این تاریخ نشان می‌دهد که جواب کامل این مسئله ثمرهٔ تلاش ریاضی‌دانان دوره‌ای به طول سیزده قرن بوده است. از آن زمان به بعد، ریاضی‌دانان (وازجمله من) از همان راه حل استفاده می‌کنند، به همان صورتی که امروز به شما گفتم.

شاید برایتان جالب باشد که ایدهٔ سلیم را دنبال کنید، او متوجه این الگو شد که اعداد صحیح فرد ۳ و ۵ و ۷ و ۹ و ۱۱، ظاهراً در آغاز سه‌گانه‌های فیثاغورسی اعداد صحیح قرار دارند، که جوابهای $a^۲+b^۲=c^۲$ را تشکیل می‌دهند. آیا درست است که گفته شود هر عدد صحیح فردی، اولین عدد چنین سه گانه‌ای باشد؟ اگر چنین است. آن را ثابت کنید. و اگر

نادرست است، نمونه‌ای از اعداد فرد بیاورید که نتواند در چنین موقعیتی قرار بگیرد.

یکی از معلمان (وگاهی شاگردان) این سؤال را مطرح می‌کردند که آیا در جواب ناشی از فرمولها تکرار صورت می‌گیرد یا نه و اگر تکرار پیش می‌آید بر چه منوالی است ولی به سبب ضیق وقت نتوانستم در این باره صحبت کنم. این بحث در واقع، مطلب بسیار ساده‌ای است.

مثلاً، فرض کنید که t از ۰ تا ۱ در نوسان باشد، بنابراین، از ۰ تا ۱ ، t افزایش می‌یابد. پس مقدار $۱-t^۲$ ، از ۱ تا ۰، سیر نزولی به خود می‌گیرد و از ۱ تا ۲ ، مقدار $۱+t^۲$ ، افزایش می‌یابد. با این حساب، خارج قسمت:

$$x=\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

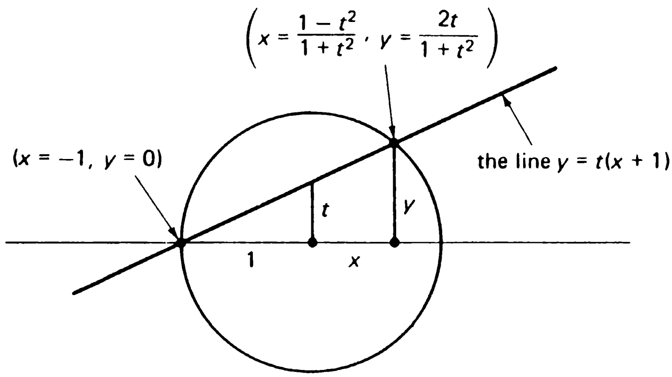
در فاصلهٔ ۱ تا ۰ کاهش می‌یابد و در این نوسانِ مقادیر t و x تکرار نمی‌شود. چنانچه t، همهٔ مقادیر بزرگتر از ۱ را اختیار کند، چه روی می‌دهد؟ t را مساوی با $\frac{۱}{s}$ فرض کنید و خودتان حساب کنید. همچنین ببینید که اگر t عدد منفی باشد چه وضعی پیش می‌آید. و سرانجام در صورتی که t برابر با کسر ساده‌پذیر و یا ساده ناپذیر $\frac{m}{n}$ باشد، در پاسخ کامل مسئلهٔ تکرار جوابها و یا امکان به دست آوردن مضارب صحیح a و b و c در $a^۲+b^۲=c^۲$، چه تحولی روی می‌دهد؟

امروزه، شاگردان ۱۶ ساله، مطالبی دربارهٔ مختصات و نمایش دایره با معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$ آموخته‌اند. نه اقلیدس و نه دیوفانتوس و نه خازن چیزی در این باره نمی‌دانستند. فکر استفاده از مختصات تا قبل از قرون شانزدهم و هفدهم مطرح نبود. توجه کنید که اگر چه من دایره‌ای رسم کردم و یافتن جوابهای معادله را برحسب یافتن «نقاط گویای دایره» تقسیم کردم. ولی در بحث از شکل استفاده نکردم. به بحث صبغهٔ کاملاً جبری دادم، همانطور که قدما انجام می‌دادند ولی امروزه، تفسیر هندسی اعمال جبری نیز مفید است. بویژه، وقتی که فرض می‌کنیم.

$$(t=\frac{y}{x+۱})$$

t چه تعبیر هندسی دارد؟ اگر یک ساعت دیگر در اختیارم بود، شاگردان را متوجه می‌کردم به اینکه معادلهٔ $y=t(x+۱)$ معادلهٔ خط راست با شیب t است.

خط $y=t(x+۱)$



این خط از نقطهٔ $x=-1$ و $y=0$ می‌گذرد. خط دقیقاً در نقطه‌ای با این مختصات

$$x=\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}} \text{ و } y=\frac{2t}{1+t^{2}}$$

دایره را قطع می‌کند. آنچه که گفته شد تعبیر هندسی آن بخشی از برهان است که نشان دهندهٔ راه حصول فرمولهای x و y برحسب $t=\frac{y}{x+1}$ بیان می‌گردد.

ابو جعفر محمدبن حسین صاغانی خراسانی خازن

ریاضیدان و منجم بزرگ نیمهٔ اول قرن چهارم است. گفته‌اند که در تمام عمر در شهر ری می‌زیسته و در دستگاه رکن الدوله دیلمی مقام ارجمندی داشت. دانشمندان بزرگی همچون بیرونی و عمرخیام ونصیرالدین‌طوسی بارها از وی یادکرده‌اند.

دیوفانت

حدود ۲۵۰ بعد از میلاد.

از زندگی شخصی این دانشمند اطلاع چندانی در دست نیست. وی اولین کسی بود که در جبر از علائم استفاده کرد و این علم را از هندسه جداکرد و به همین دلیل او را پدر جبر می‌خوانند.

بی‌نهایت ها

این گفتگو دومین گفتگویی است که باشاگردان کلاس یازدهم دبیرستان در حومهٔ تورنتو در بهار سال ۱۹۸۲ ایراد شد و حدوداً ۵۰ دقیقه طول کشید. با وجودی که چند دقیقهٔ اول حرف صحبتهایی شد که ادامهٔ گفتگوی پیشین بود، ولی مراقب بودم که زمان زیادی نگذرد تا بتوانم این گفتگو را به طور کامل به ثمر برسانم.

سرژلانگ. راجع به صحبتهای دیروز سؤالی هست؟ نه؟ امروز مطلب دیگری برایتان دارم، ولی برای اینکه حرفهای دیروز را به امروز ربط بدهم، یک نکته برگفته‌های دیروز اضافه می‌کنم، دیروز دیدیم که:

$$x^2+y^2=1$$

و دربارهٔ جوابهای گویا یاکسری x و y بحث کردیم. حالا اگر از شما بخواهند که این معادله راکمی پیچیده تر کنید چه می‌گویید؟

سلیم. $x^3+y^3=1$

سرژلانگ. درست است، و یا مثلاً این معادله

$$x^3+y^2=1$$

آیا فکر می‌کنید که این معادله بی‌نهایت جواب گویا دارد؟

سلیم. نمی‌دانم.

سرژلانگ. نمی‌دانی؟

سلیم. باید داشته باشد.

سرژلانگ. آه، واقعاً این طور فکر می‌کنی؟

سلیم. بله. معادلهٔ دیروز بی‌نهایت جواب داشت.

سرژلانگ. ولی دیروز معادلهٔ دیگری بود، دربارهٔ جوابهای این معادله یعنی $x^3+y^2=1$

چه نظری دارید؟

سلیم. چهار جواب راکه به‌سادگی می‌توان گفت.

سرژلانگ. خاطر جمعی؟ چهار جواب کدامند؟

سلیم. $x=-۱$ و $y=۱$.

سرژلانگ. [حرف او را قطع می‌کند.] چی شد؟

سلیم. اِ، نه نه، [در ذهن و تقریباً باصدای بلند حساب می‌کند.]

سرژلانگ. زیاد روشن نیست، درست می‌گویم؟

سلیم. از جوابها زیاد خاطر جمع نیستم.

سرژلانگ. پس حالا خاطر جمع نیستی. درست است. خوب. معادله‌ای که مکعب داشته‌باشد نسبت به معادله‌ای که فقط مجذور دارد از زمین تا آسمان فرق دارد. فکر می‌کنم جوابها، اساساً باید اینها باشند: $x=۰$، $y=۱$ یا $x=۱$، $y=۰$ یا $x=-۲$، $y=۳$. جواب دیگری وجود ندارد مگر آنکه y را مساوی ۱− یا ۳− بگیرید چون $y^۲$ علامت منفی را از بین می‌برد. در اینجا، اثبات هم کار شاقی است. معادلات به قوهٔ بالاتر هم از این سنخند. به محض اینکه درجهٔ معادله‌ای از ۲ تجاوز کند، بررسی و حل آن به مراتب مشکلتر می‌شود. این مسئله از مسائل حل نشده بسیار مشهوری است که تا حالا کسی به حل آن موفق نشده است. اگر قوهٔ دلخواه n را اختیار کنید، معادله به این صورت در می‌آید:

$$x^n+y^n=۱$$

که ظاهراً فقط این جوابها را دارد: $x=۰$، $y=۱$ یا $x=۱$، $y=۰$ مگر آنکه علامت منفی مناسبی قرار دهید. این مسئله، که به مسئلهٔ فرما معروف است بسیار بغرنج است و تاکنون کسی از عهدهٔ حل آن برنیامده است.

برای مقادیر پایین n مثل ۳ و ۴ و ۵ و ٦ و ۷ می‌شود بدون استدلال و برای استفاده در مقاصد خاصی، موقتاً تدبیری کرد. ولی ارائه دلیل کلی، تا این زمان نامکن است. به این موارد در ریاضیات می‌گویند، مسئله حل نشده. ریاضیدانان با این مسائل هم سروکار دارند. آنها مسائل حل نشدهٔ جالب، مسائلی که به آنها لذت می‌دهد، انتخاب می‌کنند و روی آنها کار می‌کنند. ریاضیدانان از کار کردن روی این مسائل لذت می‌برند. شما هم از کار کردن روی مسائل حل نشده لذت می‌برید؟

یکی از شاگردان. مطمئناً [خنده.]

یکی دیگر از شاگردان. دفعهٔ دیگر برای شما آماده می‌کنیم.

سرژلانگ. دفعهٔ دیگر برای من آماده می‌کنید؟ اگر این کار می‌کنید، آنها را در کتابهای

تاریخ خواهید نوشت. [خنده.] می‌خواهید آنها را در کتابهای تاریخ بنویسید؟

در واقع، قصدم این بود که فقط اشاره‌ای کرده باشم، حالا برویم سر اصل مطلب، می‌خواهیم به مسائل بی‌نهایت بپردازیم. مثلاً به این اعداد صحیح توجه کنید.

۱،۲،۳،۴،۵، ...

این اعداد تا بی‌نهایت ادامه دارند. بی‌نهایت عدد صحیح وجود دارد. حالا اگر فرد را در نظر بگیرید. می‌دانید به چه عددی فرد می‌گویند؟

یکی ازشاگردان. اعدادی که زوج نباشند. [خنده.]

سرژلانگ. بسیار خوب. چه عددی زوج است؟

شاگرد. ۲، ۴، ۶، ۸، ...

سرژلانگ. خیلی خوب، آنها را می‌نویسیم،

اعداد صحیح مثبت: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

اعداد زوج: ۲ ۴ ۶ ۸ ۱۰ ۱۲ ۱۴

توجه کنید که می‌توانید آنها را با اعداد صحیح مثبت متناظر کنید، بنابراین در تناظر، عددی جا نمی‌ماند. می‌توانیم اعداد زوج را ردیف کنیم، اولی و دومی و سومی و الی آخر، با این کار هیچکدام از آنها را جا نمی‌گذاریم. اگر چنین چیزی صورت بگیرد می‌گوییم اعداد زوج شمارا هستند. «شمارا» یعنی اینکه می‌توانیم آنها را شماره‌گذاری کنیم. اولی و دومی و سومی و قس علی هذا تا اینکه همه را به حساب بیاوریم. و اما دربارهٔ اعداد فرد، آیا اینها هم شمارا هستند؟ [سرژلانگ به شاگردی اشاره می‌کند.] اسم شما چیست؟

شاگرد. تِد

سرژلانگ. خوب، تد، اعداد فرد شما را هستند؟

تد. منظور شما را خوب متوجه نشدم.

سرژلانگ. «شما را» یعنی اینکه بتوانم آنها را ردیف کنم. اولی و دومی و سومی والی آخر، به طوری که هیچکدام از آنها را فراموش نکنم. اعداد فرد اینها هستند:

اعداد فرد: ۱ ۳ ۵ ۷ ۹ ۱۱ ۱۳ ۱۵...

در مورد اعداد زوج، ۲، اولین عدد است و دومی عدد ۴ است و عدد سومی ۶ است و چهارمین عدد ۸ است و ۱۰، پنجمین عدد است والی آخر. دهمین عدد زوج کدام است؟

تد. ۲۰.

سرژلانگ. درست است سی‌امین عدد چه عددی است؟

تد. ٦۰.

سرژلانگ. پس این اعداد را شماره گذاری کرده‌ایم. اولین عدد فرد کدام است؟

تد. یک.

سرژلانگ. و دومین عدد فرد چه عددی است؟

تد. ۳.

سرژلانگ. سومین عدد فرد کدام عدد است؟

تد. ۵.

سرژلانگ. و عدد بعدی؟

تد. چهارمین عدد ۷ است. پنجمین عدد ۹ است والی آخر

سرژلانگ. درست. در این صورت، بین اعداد فرد و اعداد صحیح مثبت تناظر یک به یک برقرارکردیم. آنها با هم متناظرند. یک به یک. یک عدد صحیح مثبت به یک عدد فرد. ۱ را به ۱ متناظر می‌کنیم و ۲ را به ۳ متناظر می‌کنیم و ۳ را به ۵ و ۴ را به ۷ و ۵ را به ۹ متناظر می‌کنیم و تا آخر. این یعنی شمارش اعداد فرد است.

۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸	...
۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	...

آیا با این کار، عدد فردی جا می‌ماند؟

تد. نه

سرژلانگ. پس می‌گوییم عددهای فرد شمارا هستند. ضمناً، آیا می‌توانید این تناظر را با فرمولی نشان دهید؟ اگر n امین عدد صحیح را n بنامیم، همان طور که آنها را اول و دوم و سوم و n ام می‌گوییم، n امین عدد زوج چه عددی می‌شود؟

تد. $۲n$.

سرژلانگ. درست است. n امین عدد زوج $۲n$ است در این صورت n امین عدد فرد چه عددی است؟

تد. $۲n-۱$

سرژلانگ. بله. درست است.آفرین. درست گفتی، n امین عدد فرد $۲n-۱$ است. پس معلوم شد که چگونه برای اعداد فرد و اعداد زوج شماره قائل می‌شویم. با وجودی که هر

یک از اعداد زوج و اعداد فرد بخشی از اعداد صحیح مثبت را تشکیل می‌دهند، می‌توان بین آنها تناظر یک به یک برقرار کرد و آنها را شمرد.

حالا سؤالی دارم. شما چه نوع عدد دیگری را می‌شناسید؟ بله، عددهـای گویـا و یـا کسرهای متعارفی.

سؤال : آیا عددهای گویا شمارا هستند؟ منظور مرا می‌فهمید؟ اعداد گویـا را در نـظر بگیرید، مثلاً عددهای مثبت. فعلاً اعداد منفی راکنار بگذارید. اعدادی از قبیل $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۷}{۵}$ و $\frac{۱۳}{۳۷}$ اعداد کسری هستند. آیا این اعداد را می‌توان شماره گذاری کرد. البته، هر عدد صحیح، عددکسری هم هست. می‌توانیم بنویسیم $\frac{۱}{۱}=۱$ و $\frac{۲}{۱}=۲$ و $\frac{۳}{۱}=۳$. پس مطمئناً اعداد صحیح مثبت قسمتی از اعدادگویای مثبت را تشکیل می‌دهند. حالا با همهٔ این توصیفات، می‌توانیم اعدادگویا را طوری ردیف کنیم که جای اولی و دومی و سومی و... معین باشد و عددی هم‌جا نگذاشته باشیم؟

چند نفر جواب مثبت می‌دهند؟ [چنددست بلند می‌شود.]

چندنفر با این نظر مخالفند؟ [چنددست بلند می‌شود،بیشتر شاگردان اظهارنظر نمی‌کنند.]

چند نفر سکوت محتاطانه را ترجیح می‌دهند؟ [خنده.]

بسیار خوب،ببینیم چه کسی جواب منفی می‌دهد. شما جوابتان منفی بود؟

شاگرد. من هیچکدام را نگفتم.

سرژلانگ. هیچکدام را نگفتید؟ [چندشاگردیک مرتبه شروع می‌کنندبه صحبت کردن.]بسیار خوب، شما، [سرژلانگ به شاگردی اشاره می‌کند.] [خنده] شما چه گفتید؟

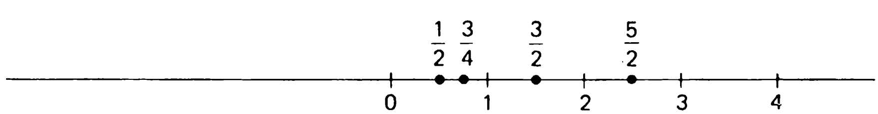
شاگرد. گمان نمی‌کنم این طور باشد، ولی به هرحال نمی‌دانم.

سرژلانگ. چرا؟ چرا این طور نباشد؟ دلیلی برای این نظرتان دارید؟

شاگرد. نه.

یکی از شاگردان. خوب،اگر کسی بگوید می‌توان آنها را شماره گذاری کرد، شما دو کسر اختیار می‌کنید و می‌توانید کسری پیداکنید که بین آنها قرار بگیرد.

سرژلانگ. آهان! این یعنی ترتیب معمولی. مطمئناً. اگر برمحور اعداد، همهٔ اعدادگویا را اختیارکنید و اگر دوعددگویا را در نظر بگیرید، می‌توانید عددگویای دیگری میان آنها پیدا کنید.



ولی من نخواستم ترتیب معمولی را برقرار کنید به فرض،آیا می‌توان ترتیب را عوض کرد؟

شاگرد. فکر می‌کنم در هر ترتیبی می‌توان این کار را کرد.

سرژلانگ. در هر ترتیبی؟

شاگردان. کسرها بی‌نهایت هستند.

سرژلانگ. آه. ولی اعداد زوج هم بی‌نهایت هستند!

شاگرد. نه، منظورم این است که بین دو عدد صحیح بی‌نهایت کسر وجود دارد.

سرژلانگ. به نظر شما این استدلال است؟ درست است،اگر دو کسر را با ترتیب معمولی در نظر بگیریم، بین آنها باز هم می‌توان کسری یافت. با این حال، آیا می‌توان کسرها را با ترتیب دیگری ردیف کرد، به طوری که اولی و دومی و سومی وجود داشته باشد و در عین حال هیچ کسری را از نظر دور نداشت؟

یکی دیگر از شاگردان. بی‌نهایت مخرج داریم،درست است؟

سرژلانگ. بله داریم.

شاگرد. و هر مخرجی بی‌نهایت صورت دارد. پس وقتی که ندانیم آنها به چه نحوی ادامه دارند،چگونه می‌توانیم آنها را ردیف کنیم؟

سرژلانگ. جواب شما این است:شما می‌پرسید چگونه باید آنها را ردیف کرد.آیا ناکامی ما در ردیف کردن آنها معلول ناتوانی ماست...

شاگرد. نه

سرژلانگ. ...و یا علل ریاضی دارد؟

شاگرد. به این سبب است که بی‌نهایت مخرج موجود است. اگر مخرج کسرها را بزرگتر کنیم،صورت کسرها هم همینطور تغییر می‌کنند.

سرژلانگ. درست است بااین وجود،این گفته‌ها دلیل محسوب نمی‌شوند. از کجامی‌دانید که...

شاگرد. اگر به تغییر دادن مخرج کسرها ادامه بدهید چگونه می‌توانید آنها را مرتب کنید؟ مثل آنهایی که ...

سرژلانگ. خوب، پس اشکال در ناتوانی ماست! شما دلیل قاطعی ندارید. منظورم،فعلاً نمی‌دانم، به شما نگفتم که چه چیز درست و چه چیز نادرست است. همینطوری،صرفاً یک سؤال است. چگونه بدانیم که این امر منشأ ریاضی دارد و یا اینکه بر شالوده‌ای تصادفی مبتنی است و قدرت ترتیب آن را نداریم.

[سکوت طولانی]

باید دلیلی عرضه کنید. اگر این طور حکم کنید که نمی‌توان دلیلی ارائه داد. همین حرف شما هم احتیاج به دلیل دارد. [دستی بلند می‌شود.] بله؟

شاگرد. [صدای نوارنامفهوم است. شاگرد ظاهراً به ترتیب مرحله به مرحله اعداد زوج و فرد اشاره می‌کند. صدای ضعیفی شنیده می‌شود: اولین مرحله می‌تواند یک باشد.]

سرژلانگ. درست است که اعداد زوج و فرد به دنبال هم مرتب شده‌اند. شاید در بحث از اعداد گویا نمی‌توان چنین ترتیبی را مسلّم دانست. باید راجع به مطلب دیگری بحث کرد. مضمون صحبت شما این است که روشی که برای اعداد فرد و زوج اتخاذ کردم برای اعداد گویا سازگاری ندارد. تا حالا غیر از این چیز دیگری نگفتید. شما برچه اساسی می‌گویید که من هر چقدر باهوش باشم باز هم نمی‌توانم روش دیگری را پیدا کنم؟ [دستی بلند می‌شود.] بله؟

شاگرد. شما اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و الی آخر را اختیار می‌کنید برای همهٔ اینها مخرج ۱ می‌گذارید و بعد مخرج ۲ و به دنبال آن مخرج ۳ و همین طور مخرجها بزرگتر می‌شوند...

سرژلانگ. بله، زیاد می‌شوند. آفرین، اسم شما چیست؟

شاگرد. گری.

سرژلانگ. حرف گری این است که، کسرها را براساس مخرج آنها مرتب کنیم. راستی، اسم شما چیست! [به شاگردی که راجع به کسرها پرسیده بود اشاره می‌کند.]

شاگرد. کِن.

سرژلانگ. کن هم گفت وقتی که مخرجها به تدریج بزرگ می‌شوند چه اتفاقی می‌افتد. کن و گری هر دو یک چیز گفتند. کسرهایی داریم مثلاً با مخرج ۱:

$$\frac{۱}{۱}\quad\frac{۲}{۱}\quad\frac{۳}{۱}\quad\frac{۴}{۱}\quad\frac{۵}{۱}\quad\frac{۶}{۱}\quad\frac{۷}{۱}\quad\frac{۸}{۱}\ldots$$

به مخرجهایی اشاره کردند که بزرگتر می‌شوند.

گری. مخرج ۲.

سرژلانگ. پس داریم:

$$\frac{۱}{۲}\quad\frac{۲}{۲}\quad\frac{۳}{۲}\quad\frac{۴}{۲}\quad\frac{۵}{۲}\quad\frac{۶}{۲}\quad\frac{۷}{۲}\quad\frac{۸}{۲}\ldots$$

وبعد

$$\frac{۱}{۳}\quad\frac{۲}{۳}\quad\frac{۳}{۳}\quad\frac{۴}{۳}\quad\frac{۵}{۳}\quad\frac{۶}{۳}\quad\frac{۷}{۳}\quad\frac{۸}{۳}\ldots$$

ومخرج بعدی چیست؟ گری

گری... $\frac{۸}{۴}$ $\frac{۷}{۴}$ $\frac{۶}{۴}$ $\frac{۵}{۴}$ $\frac{۴}{۴}$ $\frac{۳}{۴}$ $\frac{۲}{۴}$ $\frac{۱}{۴}$

سرژلانگ. پس در این صورت، کسرهای دارای مخرج یکسان را به طور افقی ردیف کرده‌ایم و مخرج کسرهایی که به طور عمودی زیر هم قرار می‌گیرند،به تدریج بزرگ می‌شود.

... $\frac{۸}{۱}$ $\frac{۷}{۱}$ $\frac{٦}{۱}$ $\frac{۵}{۱}$ $\frac{۴}{۱}$ $\frac{۳}{۱}$ $\frac{۲}{۱}$ $\frac{۱}{۱}$

... $\frac{۸}{۲}$ $\frac{۷}{۲}$ $\frac{٦}{۲}$ $\frac{۵}{۲}$ $\frac{۴}{۲}$ $\frac{۳}{۲}$ $\frac{۲}{۲}$ $\frac{۱}{۲}$

... $\frac{۸}{۳}$ $\frac{۷}{۳}$ $\frac{٦}{۳}$ $\frac{۵}{۳}$ $\frac{۴}{۳}$ $\frac{۳}{۳}$ $\frac{۲}{۳}$ $\frac{۱}{۳}$

... $\frac{۸}{۴}$ $\frac{۷}{۴}$ $\frac{٦}{۴}$ $\frac{۵}{۴}$ $\frac{۴}{۴}$ $\frac{۳}{۴}$ $\frac{۲}{۴}$ $\frac{۱}{۴}$

حالا می‌توان این کسرها را شماره گذاری کرد؟ من اینها را همان طور که شما خواستید ردیف کرده‌ام. آیا حالا می‌توانیم لیستی را تنظیم کنیم و بگوئیم این اولی و این دومی و این سومی به طوری که هیچ چیز را نادیده نگرفته باشیم.

[سکوت. دستی بلند می‌شود.] بله؟

یکی از شاگردان. نه،چون هم مخرجها و هم صورتها بزرگ می‌شوند.

سرژلانگ. این هم شد دلیل؟ لیست را هر طور دلتان می‌خواهد تهیه می‌کنید.

شاگرد. باید از... استفاده کنید [صدای نوار واضح نیست.]

سرژلانگ. از هر چیز که دلخواه است می‌توان استفاده کرد.هرطور که میلت می‌کشد می‌توانی لیست تهیه کنی. فقط بتوانی بگویی که این اولی و این دومی و سومی و الی آخر. هر روشی که باشد عیبی ندارد فقط کافی است کسرها را طوری مرتب کنیم که هیچکدام از آنها جا نماند. فقط لازم است که هشیار باشید. این سؤال به نظر شما جالب است؟ [لبخند،بعضی از شاگردان می‌گویند:بله.] فکر می‌کنید این سؤال جالب نیست؟

[سکوت.] خوب،حواستان جمع است.

یکی از شاگردان. خوب.

مثلاً $\frac{۱}{۴}$را در نظر بگیرید و بعد با حرکت زیگزاگ $\frac{۱}{۳}$و $\frac{۲}{۴}$و بعد $\frac{۲}{۳}$و ...

سرژلانگ. اهان!حالا شد! اسم شما چیست؟

شاگرد. سونل.

سرژلانگ. خوب کاری را که سونل گفت انجام می‌دهم از این گوشه شروع کنیم [به گوشهٔ بالا و سمت چپ، به کسر $\frac{۱}{۱}$ اشاره می‌کند.] این اولی، $\frac{۱}{۱}$. این دومی، $\frac{۲}{۱}$. این سومی، $\frac{۱}{۲}$. این چهارمی، $\frac{۱}{۳}$. این پنجمی $\frac{۲}{۲}$. ششمی، $\frac{۳}{۱}$. هفتمی و هشتمی و نهمی و ... یازده و دوازده و سیزده و چهارده و پانزده و شانزده و هفده و هجده و ...

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{۱}{۱} & \rightarrow & \frac{۲}{۱} & \frac{۳}{۱} & \rightarrow & \frac{۴}{۱} & \frac{۵}{۱} \rightarrow \frac{۶}{۱} & \frac{۷}{۱} & \rightarrow & \frac{۸}{۱}\cdots \\
\frac{۱}{۲} & & \frac{۲}{۲} & \frac{۳}{۲} & & \frac{۴}{۲} & \frac{۵}{۲} \quad \frac{۶}{۲} & \frac{۷}{۲} & & \frac{۸}{۲} \\
\frac{۱}{۳} & & \frac{۲}{۳} & \frac{۳}{۳} & & \frac{۴}{۳} & \frac{۵}{۳} \quad \frac{۶}{۳} & \frac{۷}{۳} & & \frac{۸}{۳} \\
\frac{۱}{۴} & & \frac{۲}{۴} & \frac{۳}{۴} & & \frac{۴}{۴} & \frac{۵}{۴} \quad \frac{۶}{۴} & \frac{۷}{۴} & & \frac{۸}{۴}\cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

حالا متوجه شدید؟ شماره‌گذاری شدند؟ آیا با این روش کسری جا می‌ماند؟

شاگرد: نه.

سرژلانگ: بالاخره، همه شماره گذاری می‌شوند. از هیچ کسری نمی‌گذریم و می‌شود گفت که این اولی و این دومی و سومی و چهارمی و الی آخر. پس کسرها شمارا هستند. برهان موجه بود؟ قضیه این است و جواب آن هم بله است:

قضیه: اعداد گویای مثبت شمارا هستند.

آن هم برهان. [سرژلانگ به شکل بالا اشاره می‌کند.] شماره گذاری را نشان دادم، قبول دارید که کسرها را شماره گذاری کردم؟

شاگرد: بله.

سرژلانگ. خوب، حالا آنهایی که می‌گفتند نمی‌شود شماره گذاری کرد چه می‌گویند؟ پس چه شد؟ هان؟ می‌خواهم بگویم، این یک تردستی است، ابتکار است، چابکی است.

یکی از شاگردان. معادله‌ای هم دارد؟ می‌توانید معادله‌ای بدهید؟

سرژلانگ. بله، می‌شود معادله‌ای ساخت، ولی خیلی پیچیده است. اگر معادله‌ای برای این کار تنظیم کنیم مجبوریم دستور دقیق انجام آن را در فرمول بیاوریم. در واقع، بالبداهه نمی‌توانیم معادله‌ای برای این ترتیب بنویسیم. چطور است که شما این کار را به عنوان تکلیف خانه انجام دهید. [خندهٔ بلند.] یک فکری برایش بکنید... [خندهٔ شدید] نه، اینقدرها هم نا امید کننده نیست، خوب، شما را مشغول می‌کند... به سرعت عمل شما ارتباط دارد.

دادن معادله، یا نوشتن رابطه، همانطور که برای اعداد فرد و زوج بیان کردیم یعنی $2n$ و $2n-1$ ، ممکن است از پنج دقیقه تا یک ساعت ذهن شما را به خود مشغول کند. پس نوشتن فرمول برای اعداد گویا، یعنی پیدا کردن n امین عدد گویا تمرینی است که باید انجام دهید.[1] ولی این مطلب دیگری است، موضوعی که می‌خواهم به آن اشاره کنم چیز دیگری است اگر وقتم را روی نوشتن این فرمول صرف کنم، به کارهای دیگر نمی‌رسم. ترجیح می‌دهم کار دیکری بکنم تا اینکه این فرمولها را به دست بیاورم. پس این فرمولها را به عهده شما می‌گذارم.

ولی می‌بینید که چه ظرافتی به کار رفته است؟

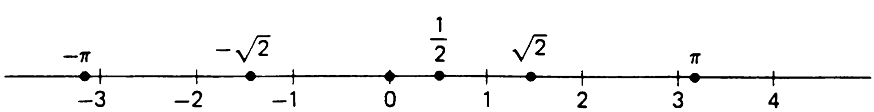
شاگرد. بله.

سرژلانگ. شما باید دوکار را هم زمان یاد بگیرید: به احساستان اعتماد کنید، با استفاده از احساسی که دارید حدس بزنید و به مدد قوهٔ تجزیه و تحلیل خود درستی یا نادرستی حدس را امتحان کنید. همهٔ این کارها را باید هم زمان انجام داد. باید یاد بگیرید که چگونه مغز خود را کنترل کنید.

[همه با هم صحبت می‌کنند، معلمانی که ته کلاس نشسته‌اند می‌گویند: «پندطویل و عریض است.»]

که طویل و عریض است. این قدرها هم طویل و عریض نیست.

خوب، برویم سر مطلب بعدی. معلوم کردیم که اعداد گویا شمارا هستند. با این که تعداد عددهای گویا خیلی بیشتر از اعداد صحیح هستند با وجود این، آنها را شماره گذاری کرده‌ایم. آیا می‌دانید به چه عددی حقیقی می‌گویند؟ محور اعداد، با محور اعداد کار کردید؟ همهٔ اعداد روی محور.



شاگردان. بله، با محور اعداد کار کردیم. [چند شاگرد هم زمان شروع می‌کنند به صحبت کردن.]

۱ـ بعدها که در این باره فکر کردم، فرمول واحدی برای این کار پیدا نکردم. شماره‌گذاری دقیق همان‌طور که در شکل آمده، فقط وقتی امکان پذیر است که چند فرمول با هم به کار گرفته شوند.

سرژلانگ. فکر می‌کنید این اعداد همه شمارا هستند؟ آیا می‌توانید آنها را طوری ردیف کنید که بگویید این اولی و این دومی و سومی و چهارمی و الی آخر؟ چند نفر بله می‌گویند؟ سؤالم را روی تخته می‌نویسم

آیا همهٔ اعداد محور شمارا هستند؟

ضمناً، این را اضافه کنم که برای ساده کردن مطلب می‌توانیم فقط اعداد بین ۰ و ۱را در نظر بگیریم. خوب چندنفر بله می‌گویند؟ دستتان را بلند کنید. چند نفر نه می‌گویند؟ [خنده.] چند نفر محتاطانه سکوت می‌کنند؟ [بیشتر شاگردان در همهٔ موارد دست خود را بلند نمی‌کنند. فقط می‌خندند.]

سرژلانگ. آه خیلی محتاط هستید! چه فکر می‌کنید؟ خیلی معلوم نیست نه؟ بعد از اینکه در اعداد گویا، چند دقیقه پیش ماندید. باید هم مواظب باشید. شما چه فکر می‌کنید؟

[سرژلانگ. به یکی از شاگردان اشاره می‌کند.]

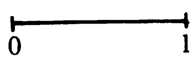
شاگرد. فکر می‌کنم می‌توان شمارا بودن آنها را نشان داد.

سرژلانگ. آنها شمارا هستند؟ چرا؟

شاگرد. می‌توان از همان دلیل سابق استفاده کرد.

یکی دیگراز شاگردان. نه، فکر نمی‌کنم این طور باشد.

سرژلانگ. خوب، بگذارید ببینیم. به همهٔ اعداد بین ۰ و ۱ توجه کنید.



کن. بین ۰ و ۱ بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد.

سرژلانگ. ولی بین ۱ و ۰ بی‌نهایت عدد کسری هم وجود دارد. کسرها را می‌توان شماره گذاری کرد؟ [دستی بلند می‌شود.] بله؟

شاگرد. مگر می‌شود در اینجا هم از مخرجها استفاده کرد؟

سرژلانگ. نه، صحبت سر مخرج نیست. همهٔ اعداد x بین ۰ و ۱ ... راستی، «عدد» در محور اعداد یعنی چه؟ آسانترین راه نمایش آن چگونه است؟

کن. اعشار.

سرژلانگ. اعشار، خوب. همهٔ اعشارها را اختیار می‌کنیم. مثلاً

۰/۱۳۲۵۱۹۸۶۱۲۷۸۲۴...

این یک نمونهٔ از اعداد اعشاری نامتناهی است. پس اعداد ما اینها هستند. اعداد اعشاری.

عدد را به صورت عدد اعشاری تعریف می‌کنیم. عدد در اینجا یعنی عدد اعشاری نامتناهی. حالا،آیا می‌توانیم اعداد اعشاری را ردیف کنیم به طوری‌که اولی و دومی و سومی وجود داشته باشد و عددی هم نادیده‌گرفته نشود؟ می‌توان این‌کار راکرد؟ این بود سؤال من.

یکی از شاگردان. هر عدد، یک عدد اعشاری نامتناهی است.

سرژلانگ. بله، درست است. هر عدد بی‌نهایت اعشار دارد. به همین دلیل سه نقطه گذاشتم.

شاگرد. در مورد π چه؟ π که مقدار اعشاری ندارد.

سرژلانگ. مطمئناً، ...۳/۱۴۱۵۹ = π. می‌دانید که مقدار π، بی‌نهایت اعشار دارد. می‌دانید که π در ۱۳/۱۴تمام نمی‌شود. شما این را نمی‌دانید؟ یک ۱۵۹ هم دارد. [خنده.] ادامه دارد، این طور: ...۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹

[سرژلانگ بسیاری از اعداد اعشاری عدد π را می‌نویسد. خنده]

معلم. از... استفاده می‌کنید.

سرژلانگ. ادامه ندهید!

معلم، بسیار خوب، نمی‌گویم.

سرژلانگ. راز مرا فاش نکنید.[۱]

معلم. این اعداد را حفظ کرده است، درست است.

[خنده،شاگردان صحبت می‌کنند:از حفظ می‌نویسد!چگونه این کار را می‌کنید؟چه فکر می‌کنید؟]

سرژلانگ. پس این عدد بی‌نهایت اعشار دارد. آیا می‌توان این اعداد را طوری کنار هم مرتب کرد که اولی و دومی و سومی و ... آنها معلوم باشد شما چه فکر می‌کنید؟

شاگرد. نه.

سرژلانگ. می‌گوید نه.

شاگرد. در اعداد گویا،می‌توانستید از جایی شروع کنید. [صدای نوار نامفهوم است.] ولی در اینجا نمی‌دانیم از کجا شروع کنیم

سرژلانگ. بله،ولی باز هم در این جا،همهٔ مضمون حرف شما این است که روشی که برای اعدادگویا به کار بردیم برای اعداد حقیقی سودمند نیست. در مورد اعداد زوج،کسانی که دلیل اقامه می‌کردند،کاری به سازگاری آن با اعداد گویا نداشتند:کل محتوای حرف آنها

۱ـ راز شعری است به فرانسه. در زبان فارسی هم شعر معروفی در این زمینه وجود دارد:

گـــرکسی از تـــو بـــپرسد ره آمـوختن π — پـــاسخی ده کـــه خـــردمند تورا آمـــوزد

«خـــــردوبینش و آگـــاهی دانشـــمندان — ره ســـــرمنزل تـــوفیق تورا آمـــوزد»

این شعرعدد π راتاده رقم اعشارمشخص می‌کند.

این بود که شیوه‌ای که برای اعداد زوج به کار رفت، برای اعداد گویا نامناسب است.

شاگرد. شاید شمارا باشند.

سرژلانگ. آه بله،شاید شمارا باشند؟

شاگرد. شما تا این جا چند روش به کار بردید؛ اول از روشی استفاده کردید، وبعد دوباره آن را تغییر دادید، شاید روشهای مختلفی برای همه اعداد سازگار باشد.

سرژلانگ: این استدلال خیلی ضعیف است. [خنده.] چون استدلال شما بر روان شناسی مبتنی است ولی من از شما می‌خواهم راجع به یک مسئله ریاضی بحث کنید. نه یک مسئله روان شناختی [خنده] اگر برای شهود ریاضی خودت،روان شناسی مرا مبنا قرار دهی، [خنده.] راه آسوده‌ای در پیش نخواهی داشت، خطر آفرین است. دوباره فکر کن.

[شاگردان با هم حرف می‌زنند.]

قضیه. اعداد اعشاری نامتناهی شمارا نیستند.

این هم قضیه. این اعداد را نمی‌شود شماره گذاری کرد. می‌خواهم این قضیه را اثبات کنم. خوب، فرض کنید می‌توانید اعداد اعشاری نامتناهی را شماره گذاری کنید. فرض کنید اولین عدد اعشاری وجود داشته باشد. فرض کنید لیستی از آنها تهیه کرده باشید. در این صورت،اعداد اول و دوم و سوم و چهارم و... باید وجود داشته باشند. برای این کار، این اعداد را باید به صورت اعداد اعشاری نامتناهی بنویسیم. ولی چنین چیزی امکان ندارد، یک عدد اعشاری نامتناهی را هرگز نمی‌توان به طور کامل نوشت. باید از یک وسیلهٔ تعبیری استفاده کرد. فرض کنید اولین عدد اعشاری را داشته باشیم

اولین: $a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, a_{16} \ldots$

بنابراین، هر a نمایندهٔ عدد صحیحی بین ۰ و ۹ است. همهٔ a_{11} و a_{12} و a_{13} و ... چنین‌اند.یعنی هر یک از آنها نشان دهندهٔ یک عدد صحیح بین ۰ و ۹ است. وفرض کنید دومین عدد هم وجود داشته باشد. آن را می‌نویسم:

دومین عدد: $a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25}\, a_{26} \ldots$

سومین عدد: $a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, a_{35}\, a_{36} \ldots$

وحالا، چهارمین عدد، چگونه آن رانشان دهم؟

گری. $\ldots\, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44}\, a_{45}\, a_{46}$

سرژلانگ. بله. و n امین عدد چگونه است؟ چطور n امین عدد اعشاری را بنویسم؟ گری

گری. $\ldots\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, a_{n4}$

سرژلانگ. پس فرض می‌کنیم اعداد اعشاری نامتناهی چنین شمارشی داشته باشند:

اولین عدد $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ \ldots$

دومین عدد $a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ldots$

سومین عدد $a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}\ \ldots$

....

n امین عدد $a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ a_{n4}\ a_{n5}\ \ldots$

باید ثابت کرد که یک عدد وجود دارد، یک عدد اعشاری نامتناهی، که در این لیست نیامده است. اگر چنین چیزی را ثابت کنم. قضیه را ثابت کرده‌ام. برای اینکه در آن صورت، ثابت می‌کنم که شما هر لیستی را که تهیه کنید، همواره می‌توان عددی یافت که در لیست نباشد. پس باید راه پیداکردن عدد غیر موجود در لیست را ارائه دهم. چطور عددی پیدا کنم که در لیست نباشد؟

[سکوت.]

باید دستورالعملی فراهم کنم. این عدد را چگونه باید یافت. هر عددی که در لیست نباشد، با بقیه اعداد موجود در لیست باید فرق داشته باشد. از این سر نخ باید استفاده کرد. عددی اختیار می‌کنیم که بین ۰ و ۸ باشد و مساوی با a_{11} نباشد، این عدد را b_1 می‌نامیم. عدد a_{11} هرچه باشد، b_1 عدد دیگری است. مثلاً اگر a_{11}، ۲ باشد، عدد b_1 می‌تواند ۷ باشد و یا هر عدد دیگری غیر از ۲. و حالا دومین عدد را اختیار می‌کنیم. عدد b_2، هر عدد صحیح بین ۰ و ۸ به طوری که با a_{22} برابر نباشد. و سپس نوبت b_3 می‌رسد، b_3 عددی است مخالف با a_{33}. عدد بعدی چه عددی است؟

شاگرد. عدد b_4 را طوری اختیار می‌کنیم که مساوی a_{44} نباشد.

سرژلانگ. درست است و به طور کلی. b_n را انتخاب می‌کنیم به طوری که b_n مساوی با چه نباشد؟

شاگرد. a_{nn}

سرژلانگ. کاملاً. و حالا این عدد اعشاری را می‌نویسم:

$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ \ldots b_n \ldots$

آیا، این عدد اعشاری می‌تواند با یکی از اعداد لیست قبلی مساوی باشد؟

شاگردان. نه.

سرژلانگ. چرا نه؟

شاگرد. برای اینکه اعداد یکسان نیستند [صدای نوار چندان واضح نیست ولی شاگرد ایدهٔ

درستی را بیان می‌کند.]

سرژلانگ. درست است. بگذارید این برهان را دقیقتر بیان کنیم. فرض کنید این عدد اعشاری

$$b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots b_n$$

با یکی از اعداد اعشاری لیست برابر است. پس باید در یک جای لیست باشد،با چه عددی می‌تواند مساوی باشد؟ منظورم n امین عدد. ولی نمی‌تواند n امین عدد باشد چون n امین عدد این است:

$$a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots a_{nn}.$$

و این عدد با آن یکی، دو عدد مختلفی هستند، چون آنها را با دو نحوه مختلف ساخته‌ایم. b_n را به نحوی اختیار کردیم که مساوی a_{nn} نباشد بنابراین $b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$ نمی‌تواند با هیچ یک از اعداد لیست برابر باشد.

بنابراین، آنچه را که نشان داده‌ام این است که اگر شما با لیستی شروع کنید من همواره می‌توانم عددی پیدا کنم که در لیست نباشد. بنابراین، در اعداد اعشاری، لیستی وجود ندارد که بتوان با آن کار را شروع کرد. استدلال را متوجه شدید؟ سلیم، تو فهمیدی؟

سلیم. بله.

یکی از معلمان. ولی این استدلال براین فرض متکی است که بتوان b_1 را طوری یافت که برابر با a_{11} نباشد.

سرژلانگ. a_{11} فقط یک عدد است. فرض کنید a_{11}، ۲ باشد. فرض کنید b_1 مساوی ۳ باشد. اگر a_{22} برابر ۵ باشد، b_2 را می‌توان مساوی ۷ گرفت. چنانچه a_{33} برابر با ۱ باشد، b_3 را می‌توان ۸ فرض کرد و اگر a_{44} معادل ۴ باشد، b_4 را می‌توان ۵ گرفت. فقط کافی است هر بار b را عدد دیگری اختیار کنید.

یکی از شاگردان: چرا bها را بین ۰ و ۸ انتخاب کردید؟

سرژلانگ. این عمل دلیل فنی دارد. اگر مثلاً به این عدد نگاه کنید:

$$0/13999999999999 \ldots$$

که همین طور ادامه پیدا کند، و ۹ ها به دنبال هم بیایند؛ و این عدد را در نظر بگیرید

$$0/140000000000 \ldots$$

این دو عدد در واقع با هم برابرند، می‌خواستم از این نوع ابهام که در بسط اعداد اعشاری روی می‌دهد، اجتناب کرده باشم. پس این فقط یک ریزه کاری فنی است. اگر هم نمی‌گفتم شما متوجه نمی‌شدید. آن را متذکر شدم تا آرامش خاطر داشته باشم. این تنها دلیل است.

فقط همین یک نوع ابهام می‌تواند به وجود بیاید. هر عدد دو بسط اعشاری مختلفی دارد. یکی با تکرار ۹ها در پایان آن و دیگری با تکرار ۰ ها در انتهای آن. فقط با این شیوه می‌توانید یک عدد را با دو بسط جداگانه نمایش دهید، و من فقط به این دلیل است که اعداد را بین ۰ و ۸ انتخاب کردم در غیر این صورت می‌توان این شرط را فراموش کرد.

پس موافقید که اعداد اعشاری نامتناهی، شمارا نیستند؟ خیلی جالب بود، درست است؟ اعداد گویا ظاهراً بیشتر از اعداد صحیح می‌باشند. اول شما این طور فکر می‌کردید ـ اغلب شما ـ که اعداد گویا شمارا نیستند. ولی هستند، حتی اگر مخرجها هم بزرگتر شوند. بعد، ذهن شمارا متوجه اعداد حقیقی کردم ـ بعضی از شما ـ بعضی از شما فکر می‌کردید که اعداد حقیقی شمارا هستند. و سرانجام زیر پایتان را خالی کردم [خنده.] و نشان دادم که اعداد حقیقی شمارا نیستند.

قصدم همین بود. متوجه شدید که از مطالب بسیار اندک ریاضی استفاده کردم. ما فقط مفهوم تناظر و شمارش را به کار بردیم از حساب و جمع و ضرب و یا هر چیز دیگر از این قبیل استفاده نکردیم. کار ما فقط متناظر کردن اشیاء با یکدیگر بود.

پیرفرما ۱۶۶۵ - ۱۶۰۱

ریاضی‌دان فرانسوی و واضع تئوری اعداد. این دانشمند که بر زبانهای لاتینی و یونانی و ایتالیایی و اسپانیایی به طور کامل تسلط داشت به ریاضیات نیز عشق می‌ورزید و هنگام فراغت به خواندن آثار ریاضی‌دانان دورهٔ خود و به تفکر در این زمینه می‌پرداخت. این دانشمند، که فقط بخشی از اوقات بی‌کاری خود را به ریاضیات اختصاص می‌داد، به تنظیم و انتشار آثار خود رغبتی از خودنشان نمی‌داد و فقط در نامه‌هایی که به دوستانش می‌نوشت از بعضی از کارهای خود یاد می‌کرد. فرما در حاشیهٔ کتابی دربارهٔ معادله:

$$x^n+y^n=z^n$$

مطالب مغشوش و مبهمی آورده و این معادله را در اعداد صحیح ممتنع شمرده است و اثبات این حکم به‌ازاء $n=4$ را بیان کرده است. فرما در پایان آن یادداشت جنجال برانگیز گفته است که اثبات کلی این قضیه را یافته است ولی چون حاشیهٔ کتاب جا ندارد از ذکر آن صرف‌نظر کرده است. ریاضی‌دانان بزرگ، به مدت سه قرن پس از فرما، همهٔ نبوغ خود را برای حل این مسئله به کار بردند ولی حتی به کوره راهی هم دست نیافتند. در سال ۱۹۰۸ یکی از دانشمندان آلمانی، وصیت کرد مبلغ ۱۰۰،۰۰۰ مارک از ماترک خود راکه در آن زمان مبلغ بسیار هنگفتی بود به حل کنندهٔ این قضیه داده شود. ولی ریاضی‌دانان پس از تلاشهای بی‌ثمر، احتمال داده‌اند که برهان فرما نادرست بوده است.

ضمیمه

آنچه که در پی می‌آید، گزیدهٔ مفصلی است از گفتگوی پاتریسیاشوا، معلم یکی از دبیرستانهای پاریس وژان برت، مدیر بخش ریاضی کاخ اکتشاف (موزهٔ اصلی علم در پاریس) فرزند چهارده ساله‌اش ستفان برت و البته سرژلانگ.

پاتریک اوئی، عضو مؤسسه حقیقاتی آموزش ریاضیات در پاریس، جلسهٔ این بحث راکه راجع به مسائل گوناگون آموزش ریاضیات است، ضبط ویدیوئی کرد. مطالب زیر از آن نوار نقل شده است. تا آنجا که من اطلاع دارم، نکات مطرح شده در این بحث، در همهٔ کشورهایی که با آنها آشنا هستم، مصداق دارد و به کتاب حسن ختام می‌بخشد.

سرژلانگ.

ژان برت. یکی از جلسات تدریس ریاضی شما راکه برای شاگردان کلاس نهم دبیرستانی در پاریس ایراد کردید، دیدیم. شاید بتوانیم جریان شروع این جلسات را به‌خاطر بیاوریم.

سرژلانگ. در کجا، در کاخ؟

ژان برت. نه، در کلاس. خوب البته از کاخ شروع شد وقتی که دوسال پیش برایمان گفتگویی ترتیب دادید. من از یکی از دوستانم خواهش کردم که اگر امکان داشته باشد، به کلاسش برویم و به شاگردانش ریاضی درس دهیم. سال گذشته، شما برای ایراد گفتگوی دیگری دوباره به کاخ آمدید و موجب شدید که در پاریس و در جاهای دیگر، راجع به مسائل تدریس ریاضی مشاجراتی صورت گیرد. و شما هم از تجربه خودتان که دربارهٔ گفتگویی که با شاگردان یکی از دبیرستانهای کانادا بود، خاطراتی را بیان کردید.

سرژلانگ. بله، درست است.

ژان برت. بعد از این بحث بود که، خانم شوا از شما خواهش کرد...

پاتریسیا شوا. من، از آقای لانگ صادقانه خواهش کردم، که اگر مانعی نباشد، به مدرسه‌ام

بیاید و با شاگردانم گفتگویی ترتیب دهد و ایشان هم پذیرفتند و آمدند. و چون دوباره امسال، بازگشته‌اند. احتمالاً راضی بوده‌اند.

سرژلانگ. صحیح است. سال گذشته، کلاس شما واقعاً عالی بود. همهٔ شاگردان کلاس هشتم شما، تیزهوشی خود را به ثبوت رساندند. آن جلسه موفقیت‌آمیز بود و به همین دلیل دوباره امسال به فکر افتادم که بیایم. امسال هم که از گفتگو با شاگردان کلاس هشتم و نهم، لذت بردم.

ژان برت. ولی موضوع دوستتان مشکل بود. معمولاً در کلاسهای هشتم و نهم از برهان زیاد صحبت نمی‌شود.

پاتریسیاشوا. ولی می‌شود صحبت کرد، می‌شود.

سرژلانگ. می‌شود؟

پاتریسیاشوا. در کلاس هشتم ضرورت ندارد. ولی در کلاس نهم یا دهم خیلی از قضایای حساب را می‌توان اثبات کرد. به‌نظر من، این زمینه است که می‌تواند برهانها راکارساز کند. در هندسه، شاگردان، شکلها را «می‌بینند» و به همین دلیل به برهانها چندان احساس نیاز نمی‌کنند؛ و همچنین به سبب آزمایشهایی که انجام می‌دهند و رسمهایی می‌کشند. همه چیز برایشان واضح می‌شود. ولی وقتی از مضرب و مقسوم علیه و چیزهایی که جنبهٔ عینی برایشان نداشته باشد، صحبت بشود، و بخواهند از نتیجه‌ای که گرفته می‌شود آسوده خاطر شوند، برای درک مطلب تشریک مساعی می‌کنند در این جا است که برهان ضرورت پیدا می‌کند.

سرژلانگ. شما قضایا را اثبات می‌کنید؟ اثبات قضایا جزء برنامه درسی هست؟

پاتریسیاشوا. نمی‌دانم اثبات قضایا رسماً جزء برنامهٔ درسی هست یا نه ولی من یقیناً این کار را می‌کنم. قضایاکم و بیش جزء برنامه است و من آنها را اثبات می‌کنم.

سرژلانگ. بله، قضایا جزء برنامه است. من کتابهایی را که برطبق برنامه درسی تدوین شده‌اند، دیده‌ام، در این کتابها قضایا آمده است ولی چه در جبر و چه در هندسه، آنها را بدون اثبات آورده‌اند. مثلاً فرمول مساحت قرص و یا حجم کره و یا حجم هرم بدون ذکر برهان نوشته شده‌اند این چیزی است که «طبق برنامه» نام دارد.

پاتریسیاشوا. ولی در هر مقطعی، حتی در دانشگاه، گاهی خیلی از مطالب را بدون برهان می‌پذیرند و اثبات آنها را به سالهای بعد محول می‌کنند چون به آنها نیاز آنی دارند.

سرژلانگ. البته، من با پذیرش بدون اثبات برخی از گزاره‌ها که برهان آنها به بعد محول می‌شود، مخالف نیستم. ولی سؤال این است که: «مبنا چیست، و در هر زمانی، کدام برهان را باید ارائه داد؟»

پاتریسیاشوا. بله، ولی اگر شما بتوانید فرمول حجم کره را برای شاگردان کلاس هشتم اثبات کنید. من از شما دعوت می‌کنم که این کار را بکنید.

سرژلانگ. بسیار خوب، می‌آیم.

پاتریسیاشوا. برای شاگردان کلاس هشتم؟ چون شاگردان در این کلاس برای اولین بار با این فرمول آشنا می‌شوند.

سرژلانگ. ایراد ندارد. من می‌پذیرم که شما می‌توانید فرمول را بدون برهان به شاگردان کلاس هشتم ارائه بدهید و در کلاسهای نهم و یا دهم آن را اثبات کنید. ولی در این کلاسها، این فرمول جزء برنامه درسی آنها نیست و برای آنها تازگی ندارد.

پاتریسیاشوا. شاید جالب باشد که هندسهٔ فضایی در فیزیک کلاس هشتم آمده است و در کلاس نهم جزء برنامهٔ ریاضی است. ریاضی‌دانان معتقدند که بچه‌ها در کلاس هشتم برای درک این مفاهیم، پختگی کافی را کسب نکرده‌اند. ولی برنامه ریزان فیزیک نظر دیگری دارند. به همین دلیل هندسهٔ فضایی، هنگامی در کتابهای ریاضی ظاهر می‌شود که بچه‌ها به سن شانزده سالگی رسیده باشند و در نتیجه، شاگردان هیچوقت دلیل این برهانها را نمی‌بینند.

سرژلانگ. ولی در درس فیزیک هم این فرمولها را اثبات نمی‌کنند.

پاتریسیاشوا. درست است، من خودم اثبات این فرمولها را در دانشگاه خواندم.

سرژلانگ. رسوایی از این بیشتر! آن برهانها در حد اعلای زیبایی هستند، ریاضیات واقعی یعنی این. شما را به تحسین ریاضیات برمی‌انگیزند. با استدلالی که کاملاً قابل درک است، به شما می‌فهماند که چرا فلان‌گزاره درست است. شاگردان از آن استدلال حظ کردند. ولی این مطالب رسماً جزء برنامه نیست و معمولاً هرگز گفته‌نمی‌شوند.

پاتریسیاشوا. من نمی‌خواهم از برنامهٔ مدوّن دفاع کنم، با وجود این مفاهیم زیادی هست که باید یاد داده شوند. آنچه را که شما درس دادید جزء برنامه نبود، کار شما چیزی شبیه فولکور بود، این کار خیلی استثنایی است.

سرژلانگ. استثنایی است چون طبق برنامه نیست، ولی اگر جزء برنامه می‌بود، خوب عادی می‌شد. برنامه را باید به نحوی تنظیم کرد که ارائه چنین برهانهایی در آن امری عادی و طبیعی شمرده شود.

ژان برت. شما خودتان نمی‌خواهید برنامه‌ای تدوین کنید؟

سرژلانگ. نه، من قصد چنین کاری را ندارم. ولی یک کتاب هندسه نوشته‌ام[1] و می‌دانم که

۱ـ هندسهٔ دبیرستانی ، همراه با گنه مورو، انتشارات اشپرنگرورلاگ ۱۹۸۳

چه چیزی باید جزء برنامه باشد. اگر مطلبی در برنامه نبود، به این معنی نیست که آوردن آن برخلاف قوانین طبیعی است. چون به هرحال، مسئولان تدوین برنامه‌های درسی، روشی را بر روش دیگر ترجیح می‌دهند.

پاتریسیاشوا. البته، یکی از مشکلات این است که مسئولان تنظیم برنامه خودشان عملاً درس نمی‌دهند. تا زمانی که «بازرسان»[1] به‌کار تدریس مبادرت نورزند، نباید انتظار برنامه‌ای منسجم داشت.

سرژلانگ. [می‌خندند.] پس باید با بوروکراسی بجنگید وبا دستگاه آموزشی اینجا و ایالات‌متحده مبارزه کنید. ولی برای تبدیل چیزی به چیز دیگر باید جانشینی ارائه داد.

ژان برت. به نظر شما همه جا همینطور است؟

سرژلانگ. بله، همه جا همینطور است.

ژان برت. به‌گمانم شما به یک استثنایی اشاره کردید، محتملاً کجا بهتر است؟

سرژلانگ. من از شوروی اطلاع دقیقی ندارم. کتابهایی دیده‌ام، کتابهایی در سطح مقدماتی، و به نظر من از کتابهای اینجا بهتر است.

ژان برت. از «مقدماتی» چه منظوری دارید، کلاس هشتم؟ کلاس نهم؟

سرژلانگ. بله و کلاس دهم. ظاهراً کتابهای بهتری هستند. ولی تعداد کتابهایی که دیده‌ام آنقدر زیاد نیست که مدرک معتبری برای قضاوت عادلانه فراهم آورد.

پاتریسیاشوا. به هرحال، کتابهای ریاضی در حال تغییرند. برخی از این کتابها کهنه و منسوخ شده‌اند و به‌کتابهای زمان شاگردی معلمان ما شباهت دارند. ولی بعضی از کتابهای ریاضی روح تازه‌ای در کالبد شاگرد می‌دمند و او را به تفکر و طرح سؤال وا می‌دارند. ولی اگر بخواهید و توانایی هم داشته باشید، هیچ کس نمی‌تواند شما را از انجام کاری که خارج برنامه رسمی است، باز دارد. من نمی‌گویم که در کلاس بیشتر وقتم را صرف گفتن مطالب خارج از برنامه می‌کنم ولی کارهایی در حاشیه دارم، همراه با موضوعات درسی آنها، سعی می‌کنم مطالب اضافی هم به شاگردان بیاموزم.

سرژلانگ. خارج از برنامه... ولی می‌توانید همه مطالب درسی را در یک چارچوب هماهنگ کنید. ولی اعتراض من به این است که متنی برای شاگردان کلاس یازدهم می‌بینم که از اول تا انجام از هم گسیخته و مملو از تمرینات مبتذل است. به عنوان مثال، در درس

۱ـ دستگاه آموزشی فرانسه، بسیار متمرکز است. بخشی از این دستگاه بربازرسی و کنترل مبتنی است. «بازرسان» که خود برنامهٔ درسی را تدوین می‌کنند برحسن اجرای آن نیز نظارت می‌کنند.

هندسه کلاس نهم، با استفاده از مساحت قرص، می‌خواهید محیط دایره را پیدا کنید. برای این کار به بسط $(r+h)^۲$، که آن را اتحاد می‌نامند، نیاز پیدا می‌کنید. خوب، شما به این بسط احتیاج دارید، و مجبورید از آن استفاده کنید، حالا چه جزء برنامه رسمی باشد یا نباشد شما برای پیشبرد مطلب خود نیاز به این دارید که شاگردان بدانند $(r+h)^۲$ مساوی است با $r^۲+۲rh+h^۲$

ژان برت. این موضوع جزء برنامهٔ کلاس دهم است.

سرژلانگ. ولی شما می‌توانید آن را زودتر درس دهید، چه فرقی می‌کند، هر وقت به آن نیاز پیدا کردید، آن را درس دهید. در طول سال، شما برنامه را به پایان می‌رسانید ولی با چارچوبی هماهنگ، و از تعبیری زیبا، تعبیری موزون، که همهٔ اجزاء آن با یکدیگر متناسبند، پیروی می‌کنید و نه خرده‌های ریز که به دنبال هم می‌آیند و بی وزن و بی‌دلیل برهم متراکم می‌گردند. من با این نوع تراکم مخالفم، تراکم اجزاء کوچک که در یک الگویی بزرگ تناسبی ندارند، الگویی که به خاطر سپردن آنها را میسر می‌کند. [خطاب به استفان ۱۴ ساله] نظر تو چیست؟

استفان. با نظر شما کاملاً موافقم، چون ما تمرینهایی دربارهٔ اعداد حل می‌کنیم که هیچ توجیهی و معنایی ندارند. معلمان به ما اعدادی می‌دهند و ما آنها را جمع و تفریق می‌کنیم، همین و بس.

سرژلانگ. منظورت این است که این کار ساختگی و غیر واقعی است؟

استفان. بله، وانگهی دوسال است که ما به جز کمی هندسه هیچ چیز یادنگرفتیم، فقط معلومات محاسبه‌ای خودمان را امتحان می‌کنیم.

پاتریسیاشوا. ولی برای آشنا شدن با مفاهیم ریاضی، باید تمرینات اساسی را حل کرد.

سرژلانگ. من هرگز نگفتم که تمرینات اساسی را حذف کنید. نه افراط و نه تفریط! چیزی راکه من نگفتم به من نسبت ندهید. من خواهان حذف همهٔ تمرینات منتظم نیستم. این تمرینها هم مورد احتیاج‌اند، ولی در برنامه‌ها، شیرازهٔ انسجام و ارتباط منطقی که موسیقی کلام در ریاضیات محسوب می‌شود، حذف شده است.

پاتریسیاشوا. ولی همواره می‌توان آن را ادخال کرد.

سرژلانگ. بله، می‌توان آنها را در کتابی نوشت، ولی معلمان خواهند گفت که این مطالب جزء برنامهٔ رسمی نیست و از تدریس آنها معذور خواهند بود.

ژان برت. و یا اینکه وقت کافی برای تدریس آنها نخواهند داشت.

سرژلانگ. همین طور است، «من وقت ندارم این مطالب را درس بدهم.» ولی این جمله

نادرست است. معلمان می‌توانند علاوه بر تدریس مطالب برنامه، کارهای دیگری هم انجام دهند.

ژان برت. [خطاب به پاتریسیاشوا] و این درست نیست، چون هر دوی این کار را می‌توان کرد.

پاتریسیاشوا. بله، چون به برقرار کردن تداوم معینی احتیاج داریم. من همیشه از این ناراحتم که شاگردان بعضی از مطالب را نخوانده‌اند. آنها به روند استمرار در چیزی که یاد می‌گیرند، نیاز دارند. دانش‌آموزان در گذر از کلاس به کلاس بالاتر به ناچار باید معلومات اساسی را کسب کرده باشند، این دانستنیها بیشتر به کلاس پایینتر ارتباط دارد تا کلاس بالاتر.

سرژلانگ. ولی می‌توان این معلومات اساسی را در چارچوب منسجم یادگرفت. حرف من این است که تضادی در این نیست که ما مطالب اساسی را ضمن این چارچوب تدریس کنیم. در صورتی که برنامه‌های رسمی طوری طرح شده‌اند که گویی ناسازگاری وجود دارد. این امر واقعیت ندارد. این مرا به یاد دفترچه‌های ستفان می‌اندازد که قبلاً به من نشان داده است. معلمت چه نوشته بود؟

استفان. «خارج از برنامه» من مجاز نبودم از جذر استفاده کنم چون رسماً در کلاس تدریس نشده بود.

سرژلانگ. و به این سبب نمرهٔ پایینی گرفتی؟

استفان. بله.

سرژلانگ. خوب، این مسخره است.

پاتریسیاشوا. او در مدرسه ما نیست [خنده.]

ژان برت. مدرسه‌اش در همان ناحیه است ولی بهتر است از ذکر نام آن خودداری کنیم.

سرژلانگ. ولی کار نادرستی است! بچه‌ای که کار منطقی و هوشیارانه انجام داده و خیلی خوب کنه مطلب را فهمیده است، به صرف اینکه کار او خارج از برنامهٔ درسی است، نباید نمرهٔ بد بگیرد. این نحوهٔ نمره دادن، غیر عاقلانه است، ولی رواج دارد. همین کارها است که بچه‌ها را از ریاضیات متنفر می‌کند.

ژان برت. این مورد بیشتر به معلم ارتباط دارد تا به برنامه.

سرژلانگ. به هر دو ارتباط دارد. هر دو برهم تأثیر می‌گذارند. نه این که یک طرف قضیه معصوم و پاک است و طرف دیگر سراپا تقصیر. معلم که یک طرف این مسئله است، اگر بخواهد می‌تواند به صلاح عمل کند. ولی معلم و برنامه همدیگر را تقویت می‌کنند. طبیعی است که برخی از معلمان نادانسته کار می‌کنند و نمی‌توانند بهتر از این باشند. تعداد این

معلمها کم نیست ولی معلمان خوب هم وجود دارند، معلمانی واقعاً عالی.

پاتریسیاشوا. شما الآن مسئله تربیت معلم ریاضی در فرانسه را مطرح می‌کنید.

سرژلانگ. نه فقط در فرانسه، در امریکا هم همین طور است، از حال و وضع آنجا بیشتر اطلاع دارم وضع اغلب مراکز تربیت معلم در آنجا، افتضاح است.

پاتریسیاشوا. در فرانسه IREM داریم.

سرژلانگ. IREM چیست؟

ژان برت. مؤسسهٔ پژوهشی آموزش ریاضی است که حوزهٔ فعالیتش همهٔ کشور را در برمی‌گیرد. ولی کار این مؤسسه به علت عدم اختصاص بودجه کافی در حال افول است. به معلمان کمک نمی‌شود تا دوره‌های خاصی را بگذرانند، برای یادگرفتن مطالب نو، ساعات کار آنها راکم نمی‌کنند.

پاتریسیاشوا. ولی آغاز اشتغال آنها هم زمان با اصلاح بزرگ در دروس دبیرستان و مقارن با «ریاضیات جدید» بود. ولی معلمان الآن، اصولاً باید باتحولات جدید آشنا باشند.

ژان برت. ... و به همین سبب دولت فکر می‌کند که IREM دیگر فایده‌ای ندارد.

سرژلانگ. «ریاضیات جدید» این هم از آن حرفها است، اصطلاحات «ریاضیات مدرن» یا «ریاضیات قدیم»، چنین مقوله‌هایی وجود ندارد. آن چه که وجود دارد ریاضیات خوب و سرحال یا ریاضیات وارفته و بی‌رمق. قبل از جریان به اصطلاح «ریاضیات جدید» مطالب بدون ارتباط منطقی هم وجود داشت مطالبی مبتذل و پیش پا افتاده که به درد هیچ‌چیز نمی‌خورد. ولی مطالب بی‌مایهٔ دیگری جانشین آنها کردند، کجای این کار پیشرفت است؟

ژان برت. «ریاضیات جدید» اینقدرها هم که فکر می‌کنید جدید نیست. کتابی در دست دارم که تاریخ انتشار آن ۱۷۴۶ است، در این کتاب صحبت از «ریاضیات مدرن» شده است و با حرف M به آن ارجاع داده‌اند.[۱] جدال راجع به تعلیم و تربیت ظاهراً چیز زیادی را عوض نکرده است.

سرژلانگ. ولی جدال نباید بر سر کلماتی از این نوع باشد. این کشمکش به جای کارسازی نمی‌رسد. نباید ریاضیات معاصر را با ریاضیات باستانی مقایسه کرد. این طرز برخورد اشتباه است. آنها با یکدیگر تعارضی ندارد. تعارض و رویا روئی بین ریاضیات منطقی، زیبا، سازنده و مفید است و ریاضیات بی‌مصرف که فقط به درد خفه کردن بچه‌ها می‌خورد. تضاد

۱ـ Institut inus de Geometrie, by M.De La chapelle vol . 1746

مبانی هندسه تألیف م. دولاشاپل جلد اول. ۱۷۴۶.

در این است. استفاده از همین عبارات ریاضیات جدید و قدیم باعث شد که بحث براثر پیش فرضهای ذهنی غلطی، به مسیر ناصوابی کشیده شود. من نه موافق اقلیدس هستم و نه مخالف. هر چه از روش او مفید یافتید، بهره گیرید و بخش اعظم آن چه که می‌ماند، به فراموشی بسپارید. البته، اقلیدس، صدها صفحه کتاب را پرکرده است، ولی امروز می‌توانیم با سی یا چهل صفحه، به مطالب مهم آن دسترسی یابیم. فقط همین و بس و بعد سراغ موضوعات دیگری می‌رویم که بعد از اقلیدس در تاریخ تحولات ریاضی کشف شده است و با دیدگاه دیگری آشنا می‌شویم.استفان نظر تو چیست؟

استفان. موافقم. شاید ریاضیات جدید چیز به درد بخوری باشد، ولی با یک سال یا یک سال و نیم چه گره‌ای گشوده می‌شود؟

سرژلانگ. منظورت از «ریاضیات جدید» چیست؟

استفان. خوب، اجتماع و اشتراک و از این قبیل. چیزهایی که شما دورش خط می‌کشید.

سرژلانگ. ببینید، پته‌اش افتاد روی آب! این رسمش نیست. قرار این است که این مفاهیم زبان ساده‌ای برای ارتباط باشد که بنا به ضرورت مصرف و پرورده شود.

پاتریسیاشوا. امروزه، برای کم کردن تعداد کلماتی که شاگردان باید یادبگیرند، حرکتی در، جریان است.

سرژلانگ. تکرار می‌کنم: کلمات باید بنا به مصرف آنها پرورانده شوند. اگر چندین هفته تا چندین ماه، صرف این شود که معلومات لغوی خود را افزایش بدهیم و کلماتی را یاد بگیریم که کار برد فوری نداشته باشند و فقط خودشان معرف خودشان هستند. باز هم کار بی‌فایده‌ای کردیم. کار «جدید» صورت دادیم ولی با اجزاء جدا از هم، نه «عبارت» جالبی و نه ترکیب زیبایی، این عمل ما هیچ نیست مگر انباشتن خرده ریزهای پراکنده روی هم. از همین باید حذر داشت. حذف این روش با آموختن مفاهیم اساسی و تکنیکهای لازم ناسازگاری ندارد. شما دوست من، در آن کتاب سالهای ۱۷۰۰، چه نوشته شده است؟

ژان برت. مثلاً، در اینجا، درپا نوشت، دقیقاً نوشته شده است:

بطور کلی، تعریف، فقط هنگامی باید به بچه‌ها ارائه شود، که چیز تعریف شده را قبلاً به آنها نشان داده باشیم. اسم همواره باید بعد از تصور ذهنی بیاید، چون اسم تنها وقتی به کار می‌آید که تصور ذهنی را تداعی کند.

سرژلانگ. صحیح است.

ژان برت. بله، کتاب بسیاری از نکات آموزشی دیگر دارد. مؤلف قصد داشته است، معاصران خود را قانع کند که به کودکان خردسال هم می‌توان ریاضیات آموخت. و برای این

منظور، زیاد چاره اندیشی کرده است.

سرژلانگ. اسم این دوست ما چیست؟

ژان برت. م. دو لا شاپل [۱]. از او چیز زیادی نمی‌دانم ولی فکر می‌کنم دوست دالامبر [۲] بوده و فرهنگستان علوم رسماً کتاب او را پذیرفته است. امروزه کسی حوصله خواندن همه آن را ندارد، ولی اگر گزیده‌ای از آن به زبان فرانسه امروزی منتشر شود، ارزش خواندن خواهد داشت.

سرژلانگ. برگردیم به مطلب اصلی بحث تا از آن فایده کامل بگیریم. من نمی‌خواهم نظریهٔ جدیدی را ارائه دهم. انگک که بر مطلب می‌گذاری، بحث به جانبداری کشیده می‌شود. برگردیم به موضوع بسط $(a+b)^2$. خیلی از بچه‌ها، این اتحاد را مثل خیلی از چیزهای دیگر ریاضیات بلد نیستند. از طرفی، به درک نظری کنه مطلب احتیاج داریم و دلیل آن را باید بدانیم، و از طرف دیگر، هر وقت به آن احتیاج پیدا کردیم، باید بتوانیم به طور خودکار از آن استفاده کنیم. چاره‌ای جز این نداریم. به همین دلیل باید از بچه‌ها بخواهیم که فرمول را ده مرتبه تکرار کنند:

$$(r+h)^2=r^2+2hr+h^2$$

ژان برت. همهٔ بچه‌ها یک صدا تکرار کنند؟

سرژلانگ. دقیقاً، همه باهم، مثل یک سرود دسته جمعی. من که این کار را می‌کنم. و شما!

پاتریسیاشوا. گاهی از بچه‌ها می‌خواهم مطلبی را تکرار کنند ولی خیلی به ندرت. به این کارها عادت ندارم.

سرژلانگ. وقتی بچه بودم، $(a+b)^2$ را همانطور یادگرفتم، و هرگز هم آن را فراموش نکردم. معلم من همانطور به من یاد داد، و همانطور هم باید باشد. راه دیگری نیست. باید همچون یک آهنگ موسیقی به گوش نفوذ کند. هر دفعه که از اتحاد استفاده می‌کنید دلیل درستی آن را نمی‌پرسید، باید بتوانید آن را به درستی بکار برید. و تنها راه به خاطر سپردن هر مطلبی ـ یا بهتر است بگویم که بهترین راهی که تاکنون یافته‌ام ـ این است که ده بار و باز هم ده‌بار قبل از خواب آن را تکرار کنیم. من به بچه‌ها گفتم: فرمول را تکرار کنید. اول جدی نگرفتند، ولی آنها با من همچون سرود دسته جمعی آن را تکرار کردند و خوششان آمد. استفان، من با همین روش با شما کار کردم. از شما چه خواستم تکرار کنید؟

۱ـ M. de la chapelle.

۲ـ d' Alembert.

استفان. فرمول کره را

سرژلانگ. صحیح، ما فرمول را ثابت کردیم ولی تو در برخورد اول آن را به خاطر نسپردی. بعد از شما خواستم چه کار کنید؟

استفان. خوب، گفتید به ما که $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ را تکرار کنیم.

سرژلانگ. دقیقاً، دو هفته پیش بود. و حالا تو آن را تا دم مرگ فراموش نمی‌کنی!

استفان. بله، فکر می‌کنم همین طور است.

سرژلانگ. پس برای به خاط سپردن فرمول، باید آن را ده بار تکرار کرد ولی حتماً باید برهان را آموخت. چون مغز دو کار مختلف دارد. این دو کار، ضرورتاً مغایر هم نیستند، بلکه مکمل یکدیگرند. باید از هر دو آگاهی داشته باشند. در دانشگاه ییل، وضع دانشجویان ۱۷ و ۱۸ ساله هم همینطور است. بعضی از آنها، خیلی از آنها، وقتی که از دبیرستان به دانشگاه می‌آیند نمی‌توانند این فرمول را از حفظ بگویند. شاید یک سوم و یا شاید نصف آنها همین وضع را دارند. افتضاح!

ژان برت. وضع بدتر از اینجا نیست.

سرژلانگ. بی‌شک اینجا هم همینطور است. حتی وقتی بچه‌ها بزرگتر هستند و به سن ۱۷ یا ۱۸ سالگی رسیده‌اند، من باز هم آنها را وادار می‌کنم که فرمول را ده مرتبه تکرار کنند [خنده.] اول فکر می‌کنند که من آنها را به کار بیهوده‌ای می‌گمارم ولی پس از مدتی متوجه می‌شوند که حق بامن است. این رویه در یادگیری خیلی کار آمد است و گاهگاهی باید آن را به کار برد. ولی برهان را هم باید درک کنند و نحوه تشکیل آن را دریابند. شاگردان به هر دو نیازمندند. آنها پس از مدتی از اینکه آنها را وادار کردم یک مطلب را ده بار تکرار کنند، لطیفه‌هایی جعل می‌کنند.

ژان برت. شما از تدریس در کلاسهای دبیرستانی در حومهٔ پاریس و در تورنتوی کانادا تجربه‌های زیادی کسب کرده‌اید، واکنش شاگردان را در برابر کارهای خودتان که معمولاً جزء برنامه و مطابق با جریان عادی کار آنها نیست، چگونه ارزیابی می‌کنید.

سرژلانگ. شما واکنش شاگردان را مشاهده کرده‌اید.

ژان برت. صحیح، ما چند نمونه را دیده‌ایم ولی ارزیابی شما چیست؟

سرژلانگ. من که لذت می‌برم! آنها خوشحال می‌شوند و واکنش آنها مثبت است. خیلی زود جذب می‌شوند و شروع می‌کنند به یادداشت نوشتن. بعد از آن کلاس شما از آنها پرسیدید...

پاتریسیاشوا. بله، آنها هر دو هفته یک تکلیف خاصی دارند، و فردای آن روز، من از آنها

خواستم که کار شما را دربارهٔ محیط دایره، بنویسند.

سرژلانگ. من تکالیف آنها را که شما امروز آوردید دیدم. بسیاری از آنها توانسته بودند، همه چیز را بنویسند. شما به آنها کمک نکردید؟

پاتریسیا شوا. نه، همهٔ شاگردان همه چیز را، با تمام جزئیات، به خاطر نداشتند ولی تقریباً همه آنها تصور کلی برهان را به یاد می‌آوردند.

سرژلانگ. من نوشته آنها را دیدم، فوق‌العاده بود. هم مرتب بود و هم انسجام داشت، واقعاً کار با شکوهی بود.

پاتریسیاشوا. ترتیب آنها حرف نداشت.

سرژلانگ. هم مرتب بود و هم متین. جملات و توضیحات و شرح چاره جوئیها را دیدم. شاگردان چند فرمول یادگرفته بودند، پس مقداری جبر آموختند، برهانی را متوجه شدند و یادگرفتند که چگونه افکار ریاضی خود را بیان کنند. نتیجه کار باید همین باشد. وقتی که با هم ریاضی کار می‌کنیم، من با جمله‌ای شروع می‌کنم و از شاگردان می‌خواهم، با یک دو کلمه جمله مرا کامل کنند. و یا اینکه جمله‌ام را خودم به اتمام می‌رسانم. ولی وقتی که جلو افتادیم از آنها می‌خواهم که خودشان جمله‌ای را بسازند و فکر ریاضی خود را توضیح دهند و بعد، در لحظه‌ای، عکس این کار را می‌کنم، از شاگردان می‌خواهم که هر چه تو کله‌شان هست بگویند و خودشان افکار ریاضی خود را که در مغزشان هست بیان کنند. این به نفع دانش‌آموز است که این کار را بکند. کار یائل را در این زمینه دیدید، آخر وقت، وقتی که از او خواستم برهان فرمول محیط دایره، $c=2\pi r$ را تکرار کند، دقیقاً همین کار را کرد. او این کار را با دستهاش و چشمهاش و مغزش کرد.

ژان برت. ما تقریباً زمزمهٔ تفکرش را می‌شنیدیم.

سرژلانگ. ما تفکرش را با چشم دیدیم. صورتش با آدم حرف می‌زد، با آن تمرکزی که داشت...

پاتریسیا شوا. صحیح است. من از آنها حرف کشیده‌ام، تا حالا این موضوع پیش نیامد تا بگویم. ولی در کلاسهای من، شاگردان حرف می‌زنند، جمله‌های ناقص را کامل می‌کنند و بعد خودشان جمله می‌سازند. در موردی که شما داشتید، معلمشان عوض شده بود، ولی روش کار با آنچه که به آن عادت کردند، اساساً فرق نداشت.

سرژلانگ. من دانشجویانی را می‌شناسم که از عهدهٔ چنین کاری در ریاضیات برنمی‌آیند. شاید نصف شاگردان یک کلاس معمولی، این توان را ندارند. البته کلاسهای درجه یک و با استعداد هم هست، ولی در یک کلاس عادی در ایالات متحده ... به تنها چیزی که فکر

می‌کنند این است که مربع کوچکی را پرکنند. به آنها مسئله‌ای می‌دهند که جواب آن یک عدد است. و از آنها هیچ کاری را نمی‌خواهند مگر آنکه آن جواب عددی را در جای خالی قرار دهند. معمولاً فقط از همین کار برمی‌آیند ولی اگر از آنها بخواهید جمله‌ای بسازند، و یا اینکه مطلبی را توضیح دهند و یا برهانی را بنویسند، در می‌مانند. افتضاح است. در فرانسه هم، خیلی از کلاسها در همین حد است ـ منظورم کلاسهای شما نیست، چون شما خوب کار می‌کنید [خنده.] ـ استفان، کلاس شما چه حال و هوایی دارد؟

استفان. همان طور که گفتید، فقط جواب را از ما می‌خواهند. خوب، گاهگاهی از ما می‌خواهند یکی چیزی را بنویسیم، ولی به ندرت.

ژان برت. وقتی که معلمان از شاگردان نخواهند که برهانها را یاد بگیرند، چطور می‌شود از آنها انتظار داشت که چیزی را بنویسند.

سرژلانگ. البته، ولی نوشتن مطلب، به روشن شدن ایده‌ها کمک می‌کند. و اگر از شاگردان بخواهند که این کار را بکنند، مطلب برای آنها جذابیت بیشتری پیدا می‌کند. کار شاقی هم نیست، لذت بخش است. ولی وقتی که یائل همه برهان را، به طور کامل، یک بار دیگر گفت، همه دیدید چه شد، همهٔ شاگردان کلاس، نا خود آگاه، با کف زدن او را تحسین کردند. [ص ۹۸ محیط دایره.]

پاتریسیاشوا. ولی انتخاب یائل چنین وضعی را به وجود آورد. اگر هر شاگرد دیگر کلاس را به جای یائل برمی‌گزیدید، این وضع، به همین صورت که اتفاق افتاد، روی نمی‌داد. مسلم بود که حال و هوای کلاس او را جذب کرده بود، دیگران به اندازه او، مطلب را درک نکرده‌اند.

ژان برت. منظورت این است که انتخاب یائل اتفاقی نبود.

پاتریسیاشوا. بله، برای بازگویی همهٔ برهان.

ژان برت. ولی نمونهٔ دیگری هم هست، راچل در تورنتو.

سرژلانگ. آن مورد با این یکی فرق داشت. در تورنتو، شاگردی بود که نمی‌توانست کاری را که یائل کرد، انجام دهد. و من ناچار بودم که او را مرحله به مرحله پیش ببرم. واقع امر همین است، استعداد ریاضی همهٔ شاگردان یکسان نیست. و همهٔ شاگردان نمی‌توانند در اولین جلسه چنین کاری را کنند ولی اگر هفتهٔ بعد، جلسه دیگری با آن کلاس داشتم، بسیاری از شاگردان از عهدهٔ چنین کاری بر می‌آمدند.

پاتریسیاشوا. ولی شرط داشتن وقت. اگر ما هم وقت به اندازه کافی داشتیم، عملاً می‌توانستیم کمبودهای همهٔ شاگردان را، به جز آنهایی که نارسایی عقلی دارند، جبران کنیم.

ولی در هر کلاس ۲۵ شاگرد داریم، گاهی بیشتر هم می‌شوند، بسیاری از آنها، خیلی از کلاس عقب ترند، و ما هم به جز اینکه آنها را به همان وضعی که هستند رها کنیم. متأسفانه کاری از دست ما ساخته نیست. وضعیت تأثرانگیزی است، ولی...

ژان برت. با حرف شما موافقم، ولی از طرف دیگر، تبادل افکار به همان نحو که با یائل صورت گرفت، برای همهٔ کلاس مفید بود برای اینکه در جو کلاس، یک تنش روانی به وجود آورده بود. همه دلهره داشتند، شاگردان منتظر بودند ببینند یائل می‌توانست همه چیز را دوباره باز سازی کند یا نه، و تقریباً در همهٔ مراحل با او بودند، برای همه مفید بود.

پاتریسیاشوا. ولی خیلی از شاگردان از این که انتخاب نشدند، خوشحال بودند و یا شاید به چیز دیگری فکر می‌کردند، باید منصفانه فکر کرد.

ژان برت. ممکن است، من نگفتم که همهٔ شاگردان مطلب را دنبال می‌کردند ولی گفتگویی تا این حد مهیج با این همه تمرکز...

پاتریسیاشوا. مطمئناً، شاگردان هوای یائل را داشتند و او را تشویق می‌کردند ولی خیلی از شاگردان خوشحال بودند از اینکه فقط همین کار را می‌کردند.

سرژلانگ. اگر شاگرد دیگری را انتخاب می‌کردم، توانایی او را در نظر می‌گرفتم. با شاگردان مختلف یکسان رفتار نمی‌کنم. اگر می‌فهمیدم که شاگرد نمی‌تواند مثل یائل برهان را یک بار دیگر بگوید، روش بحث را عوض می‌کردم. درست همان کاری را انجام می‌دادم که با راچل در تورنتو کردم: اول مجبور بودم او را گام به گام برای بازگویی برهان پیش ببرم. ولی در مراحل نهایی، از چیزهایی گفت که در اول بحث، از آنها اطلاعی نداشت. من شاگردان را به طور اتفاقی انتخاب می‌کنم. از آنهایی که دست بلند می‌کنند نمی‌پرسم. شاگردانی را انتخاب می‌کنم که دست بلند نمی‌کنند.

پاتریسیاشوا. در همین مورد، باید به نکته‌ای اشاره کنم. یکی از شاگردانم خیلی مأیوس شده بود، او دستش را بلند می‌کرد و شما هم از او نمی‌پرسیدید. او کمی خجالتی است.

ژان برت. ردیف اول نشسته بود!

پاتریسیاشوا. نه، کنار یائل نشسته بود. در ریاضیات خیلی مستعد نیست ولی در این مورد خاص، می‌خواست به شما نشان دهد که می‌تواند کاری انجام دهد. و شما هم فقط به سبب اینکه دستش را بلند کرد، از او نپرسیدید.[خنده.]

سرژلانگ. بسیار خوب، این کار بی‌مخاطره هم نیست من شاگردان را نمی‌شناسم و فقط یک بار آنها را می‌بینم... می‌خواستم از شاگردان بپرسم که در جریان کلاس قرار نداشتند. هر کسی ممکن است در این تله بیفتد. همهٔ حالتها ممکن است روی دهد. بعضی نمی‌توانند

برهان را بازگو کنند و برخی می‌توانند و حتی خودشان هم نمی‌دانند. هر وضعیتی ممکن است به وجود آید. ما فقط به این احتیاج داریم که آنها را به بالاترین سطح آگاهی برسانیم.

پاتریسیاشوا. و این نیازمند زمان است.

سرژلانگ. بله، نیازمند زمان است. ولی این اشتغال دراز مدتی است. وقتی که شاگردان نحوه کار در یک مورد را آموختند، موارد بعدی را خیلی راحت‌تر می‌آموزند. وقت ضایع نمی‌شود.

ژان برت. این صحبت شما به آن چه که چند لحظه پیش گفتید، ارتباط دارد. اگر هر چه را که به نظر شما ضروری نیست از برنامه حذف کنید، در این صورت وقت کافی برای انجام بقیهٔ کارها پیدا می‌کنید.

سرژلانگ. دقیقاً همینطور است. صحیح است. اگر مطالب کسل کننده را از برنامه پاک کنید و ارتباط آنها را بازسازی کنید، در این حالت، برای ارائه ریاضیاتی دلپذیر و مفید با همهٔ برهانهای لازم و هر فرمولی که به طور خودکار باید بدانید، وقت زیاد خواهید داشت. نظر شما کاملاً درست است.

ژان برت. استفان تو به عنوان مهمان، در ردیف آخر کلاس نشسته بودی. نظر تو چیست؟

استفان. خوب بود، ولی اگر همه‌اش همینطور باشد، شاید کسل کننده شود، ممکن است شاگردان، در طول ساعت تدریس، توجه کمتری داشته باشند.

سرژلانگ. آه، می‌دانید، حتی با دانشجویان ۱۷ساله می‌دانم چه کار کنم تا حواسشان جمع شود. کافی است که این کار را کرد [باانگشت اشاره می‌کند] یقین داشته باشید که سراپا گوش می‌شوند. چون آنهانمی‌دانند که این اشاره چه وقت به آنها اصابت می‌کند. [خنده]. متوجه ساختن آنها کار بزرگی نیست. علاوه براین، با ارائه مسائل واقعی ریاضیات،می‌شود توجه شاگردان را جلب کرد.

پاتریسیاشوا. ولی شاگردان کلاس هشتم یا نهم خیلی کم سن و سالند. شاگردان این کلاسها تقریباً چیزی از ریاضیات نمی‌دانند.

سرژلانگ. بله، باوجود این مطالب معینی هست که ... اعداد اول را در چه کلاسی درس می‌دهید؟

پاتریسیاشوا. در کلاس هشتم.

سرژلانگ. و بنابراین در کلاس نهم، آمادگی بیشتری دارند.

پاتریسیاشوا. ولی در این کلاس،اصلاً راجع به این مطلب صحبت نمی‌کنیم..

سرژلانگ. اصلاً هیچ چیز در این باره نمی‌گوئید؟ برگشتیم به صحبتهای قبلی، در کلاس

هشتم، به نتیجه‌ای می‌رسید، و بعد، همه چیز تمام می‌شود، دنباله مطلب از سرگرفته نمی‌شود.

پاتریسیاشوا. در کلاس نهم، فقط برای نوشتن اعدادگویا از اعداد اول استفاده می‌کنیم. باید کسرهای ساده را یادگرفت ولی از لحاظ نظری پیشرفتی حاصل نمی‌شود. مفاهیمی که در کلاس هشتم معرفی شده‌اند، در این جا به‌کار برده می‌شوند.

سرژلانگ. بسیار خوب، ولی راجع به اعداد اول مسئله‌ای هست که می‌توان آن را در کلاس هشتم مطرح کرد. فقط کافی است تعریف اعداد اول را بدانند. اول از آنها بپرسید که اعداد اول بی‌شمارند یا نه و آیا می‌توان این موضوع را ثابت کرد یا خیر. در این مرحله،به آنها بگویید: به این دوقلوهای اعداد اول توجه کنید۳ و ۵ ؛ ۵ و۷؛ ۱۱ و ۱۳؛ دوقلوهای بعدی کدامند؟

استفان. ۱۷ و ۱۹.

سرژلانگ. صحیح، و می‌توانید این سؤال را مطرح کنید: آیا این اعداد بی‌شمارند؟ و به واکنش آنها توجه کنید. این مسئله می‌تواند آنها را سرگرم کند و تعداد آنها را شاید تا ۱۰۰ پیداکنند و آنها را وادار می‌کند تا با اعداد صحیح و جمع و تفریق، و تقسیم کار کنند، منتها در زمینه‌ای معنادار و برای یافتن پاسخ یک جواب. پس از آنکه محاسبه را تا ۱۰۰ به انجام رساندند، آنها متوجه می‌شوند که احتمالاً این اعداد همچنان ادامه دارند. از آنها بپرسید:«تعداد این دوقلوها بی‌شمار است؟» ببینید آنها چه جوابی می‌دهند. بعضی می‌گویند، بله. و برخی پاسخ نه می‌دهند، و بعد، شما علت را از آنها جویا شوید، درک شهودی آنها را بررسی کنید. و بعد از مدتی، یا در همان روز، آنها را مرخص کنید، به خانه بروند، و محاسبه خود را ادامه دهند. به این ترتیب، آنها وارد مرحله‌ای می‌شوند، که نتیجه گیری از آن، مغالطه آمیزتر است. و یک هفته بعد، پس از مدتی انتظار ؛ در برابر این سؤال: آیا تعداد دوقلوهای اول بی‌شمار است یا محدود؟ به آنها می‌گویید: «هیچکس جواب این سؤال را نمی‌داند! و اگر که بتوانید پاسخ قطعی برای این سؤال پیدا کنید، نام شما در تاریخ ریاضیات ثبت خواهدشد.»

پاتریسیاشوا. ولی وقتی این سؤالها را می‌توانیم مطرح کنیم که آنها را بدانیم. باید فرهنگ ریاضی داشت.

سرژلانگ. پس به خاطر خدا به من بگویید که مراکز تربیت معلم، که قرار است معلم تربیت کنند، چه فایده‌ای دارند؟

پاتریسیاشوا. ولی چنین چیزی وجود ندارد!

سرژلانگ. پس بر عهدهٔ جامعه است که دربارهٔ تربیت معلم چاره اندیشی کند.به جای

انباشتن کتابها با مطالب مبتذل، چرا از همین موضوعات استفاده نمی‌کنند؟ با این کار بچه‌ها به کار و تفکر واداشته می‌شوند. با مطرح کردن مسائل با معنی و هم بافت و کاملاً زیبا، بچه‌ها به همان خوبی، عمل تقسیم را یاد خواهند گرفت و دروس پایه‌ای آنها به همان خوبی تقویت خواهد شد. در بعضی از معادلات هم چنین کاری ساخته است. وقتی که از x و y استفاده کنید می‌توانید همان کاری را بکنید که من در سخنرانی در کاخ اکتشاف و یا [1] در تورنتو کردم.

پاتریسیاشوا. راستی، بعضی از شاگردانم، نسخه‌ای از مکالمات سال گذشته شما را در دست داشتند، در صفحهٔ اول آن با حروف درشت معادله $y^۲=x^۳+۱$ چاپ شده بود. در جلسه بعد، یائل از من پرسید که معادله چیست. دربارهٔ معادله من حرفی نزده بودم (تاحالاهم راجع به معادله صحبتی نشده است)، ولی من این اصطلاح ریاضی را برایش توضیح دادم. یائل به من گفت: «آه، معادله این است، پس خیلی آسان است، فکر می‌کردم چیز خیلی پیچیده‌تری باید باشد.» و ناتالی، دختری که شما نخواستید از او سؤال کنید. سعی کرد جوابهایی برای آن پیدا کند و گفت: «خوب، $y=۳$ و $x=۲$»

سرژلانگ. دیدید، همه چیز را شما گفتید [خنده.]

ژان برت. وبعد، آیا او همهٔ سخنرانی آن جلسه را خواند؟

پاتریسیاشوا. نمی‌دانم، از او نپرسیدم ولی هر دو از اینکه در تکلیف بعدی، معادله‌ای نیست، خیلی دلخور بودند. من به آنها گفتم که مسئله فقط این نیست که جوابها را پیدا کنیم، بلکه باید ثابت کنیم که جوابهای دیگری نیز وجود ندارد.

ژان برت. ولی باید اول جوابها را پیدا کرد، این دو مسئله یکی نیستند.

پاتریسیا شوا. می‌خواستم آنها را سرگرم کنم.

سرژلانگ. کاملاً. واکنش عجیبی است، چون اگر شاگرد این طور جواب دهد، مسئله برایش جالب است و می‌توان به پیشرفت او کمک کرد. حتی می‌توان آنچه راکه رسماً جزء برنامه است، بااستفاده از این زمینه به او یاد داد.

پاتریسیاشوا. بله، ولی باید قرائن سرشاری یافت تا قدرت احاطه ...

سرژلانگ. جبر و هندسه و مختصات هست، از همه چیز می‌توان استفاده کرد. ولی در اینجا، کلیت وسیعتری است که به انسان تحرک می‌دهد، یک بیان موزون، مانند یک آهنگ موسیقی، یک تعبیر ریاضی و درعین حال دل‌فریب...

ژان برت. شما موسیقی را واقعاً دوست دارید!

---

۱ - زیبایی ریاضیات اشپرنگرورلاگ - ۱۹۸۵

سرژلانگ. بی‌شک، موسیقی را دوست دارم، بله، برای اینکه می‌خواهم ارتباط برقرار کنم وقتی که از «موسیقی» نام می‌برم به مخاطبانم هیجان می‌دهم. آنها عادت کردند به اینکه فکر کنند زبان ریاضیات و موسیقی از هم جداست. ولی نه موسیقی بی‌مایه و ضرب آهنگهای ثانیه شمار و یا کثرت ارتعاشات. منظور من از بیان موسیقی و ریاضیات نظیر آن، چیزی سوای اینها است، نُت ریاضیات نتی است که می‌تواند گسترش یابد.

ریاضیات فقط «اعداد» نیست و موسیقی فقط نت نیست. هر چیزی که به شما احساس شعف و شادی دهد، موسیقی است. ریاضیات می‌تواند چنین احساسی دهد. شما همین الآن گفتید، وقتی که ناتالی جوابهای معادله را پیدا کرد، خیلی خوشحال بود.

پاتریسیاشوا. بالطبع من هم خوشحال شدم.

ژان برت. بله، و چقدر آن سخنرانی که به آن اشاره کردید جالب است، می‌توان بیش از نصف آن را، بدون برخورد با هیچ مشکلی که قابل فهم نباشد، خواند.

پاتریسیاشوا. سال گذشته از کتاب شما دربارهٔ اعداد اول[1] استفاده کردم و در آخرین ساعت، به منظور مقایسه و بررسی نتیجه کار، به آن نظر انداختیم، پیشرفت خوبی کرده بودیم، لگاریتم مشکل آفرین بود. چون همان طور که می‌دانید این مطلب برای کلاس هشتم سخت است.

سرژلانگ. خوب، طبیعی است.

پاتریسیا شوا. به هرحال، مخاطبان این درس شاگردان کلاس هشتم نبودند.

ژان برت. مخاطبان مشخصی نداشت. مخاطبان این درس همان مستمعین بودند و اگر در مرحله‌ای، دیگر قادر به درک مطلب نبودند می‌توانستند به همان مقدار اکتفا کنند، ضمن اینکه می‌دانستند که هنوز سخن پایان نیافته است بی‌شک در آموزش مقدماتی، کسی از نامتناهی بودن ریاضیات و یا اینکه ریاضیات دو هزار سال پیش یا دو قرن پیش و یا پنجاه سال قبل به‌وجود آمد، حرفی نمی‌زند. دانستن اینکه ریاضی‌دانان بزرگ هم، بعضی چیزها را نمی‌دانند و یا اینکه مسائلی وجود دارد که هنوز کسی از عهدهٔ حل آنها برنیامده است، به مردم احساس مطلوبی می‌دهد.

پاتریسیاشوا. و به گروهی دیگر از مردم روحیه می‌دهد.

سرژلانگ. اوضاع و احوالی پیش آمده است که من این واقعیت را با صراحت در یکی از کلاسهایم گفته‌ام. وقتی به آنها گفتم که همهٔ این قضایا شاید دو هزار سال پیش و یا دویست

۱- زیبایی ریاضیات اشپرنگرورلاگ - ۱۹۸۵

سال قبل کشف شده‌اند، یکی از بچه‌ها گفت: «خوب، پس آن چه را که شما امروز کشف می‌کنید دویست سال دیگر در مدارس یاد می‌دهند.» این گفتگو را یادتان هست؟ آنها جنبهٔ انسانی این مطلب را دریافتند. چون یکی از آنها از من پرسید که کار من چیست و من گفتم که تحقیق می‌کنم. قضیه کشف می‌کنم، بعد او گفت: «و اگر نتوانید قضیه کشف کنید، چه می‌کنید؟» شاگردی که پشت سرش نشسته بود فریاد زد «بازنشستگی، بازنشستگی!» [خنده.]. آنها مطمئناً، متوجه مطلب شدند، و ریاضیات در فکر آنها زنده شد.

پاتریسیاشوا. من به آنها می‌گویم که ریاضیات وجود دارد و زنده است، کلیشه‌ای کهنه و متعفن نیست ولی کار با بچه‌های کم سن و سال، گاهی مشکل است.

سرژلانگ. حق با شما است. هر معلمی باید براساس روش و سلیقهٔ خود عمل کند. هر معلمی باید مطابق وسائلی که در اختیار دارد، شاگردان را برانگیزد. از همه چیز باید استفاده کرد، محدودیتی در میان نیست.

ژان برت. نتیجه گیری قطعی همین است: از همه چیز می‌توان استفاده کرد. محدودیتی نیست.

ناشر برگزیده
سالهای ۷۳ و ۱۳۷۵

شابک ۸ـ ۳۰۷ـ ۴۳۶ـ ۹۶۴ ISBN 964-436-307-8

انتشارات مدرسه

۴۰۰۰ ریال ـ کد ۱۵۸/۳